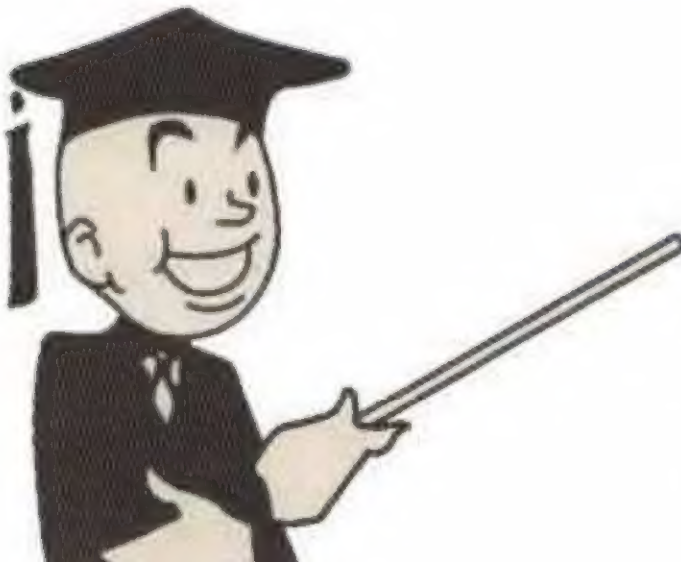


تم بيع أكثر من ٣٠ مليون نسخة من ملخصات شوم!

الهندسة

ملخصات
إيزي شوم

- يغطي جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح



د. ريتش

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.

مصر

الهندسة

المؤلف

د. بارنيت ريتش

مراجعة

د. فيليب أ. شميدت

محرر الموجز

د. جورج ج. هادمينوس

ترجمة

مهندسة / مرام صلاح الدين طه

مراجعة

أ.د. / أحمد عبد السميع الحملاوي

أستاذ الفيزياء الهندسية - جامعة المنوفية

عميد المعهد العالي لتكنولوجيا البصريات

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م

مصر

حقوق النشر

Geometry

by

Barnett Rich

English Edition: Copyright © 2001 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.
Arabic Edition: Copyright © 2004 by International House for Cultural Investments S.A.E. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or distributed in any form or by any means, or stored in a data base or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

International House for Cultural Investments S.A.E.

8, Ibrahim El-Orabi St., El-Nozha El-Gedida

Heliopolis West, Cairo, Egypt

E-mail: ihci@link.net

الطبعة العربية الأولى حقوق الطبع والنشر © 2004، جميع الحقوق محفوظة للدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م. لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة سواء كانت إلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدمات

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى - التزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج.م.ع.

ص.ب: 5599 هليوبوليس غرب / القاهرة - تليفون: 6222105/6221944 فاكس: 6221944 (00202)

بريد إلكترونى: ihci@link.net

رقم الإيداع: 2003/14818

I.S.B.N: 977-282-160-5

كتب أخرى فى سلسلة ملخصات شوم إيزى

- ملخص شوم إيزى : الفيزياء العامة
- ملخص شوم إيزى : الفيزياء التطبيقية
- ملخص شوم إيزى : الكهرومغناطيسيات
- ملخص شوم إيزى : الكيمياء العامة
- ملخص شوم إيزى : الكيمياء العضوية
- ملخص شوم إيزى : البيولوجيا
- ملخص شوم إيزى : البيولوجيا الجزيئية وبيولوجيا الخلية
- ملخص شوم إيزى : الوراثة
- ملخص شوم إيزى : الجبر العام
- ملخص شوم إيزى : الجبر الأساسى
- ملخص شوم إيزى : الإحصاء
- ملخص شوم إيزى : الاحتمالات والإحصاء
- ملخص شوم إيزى : حساب التفاضل والتكامل
- ملخص شوم إيزى : مبادئ التفاضل والتكامل
- ملخص شوم إيزى : حساب المثلثات
- ملخص شوم إيزى : الرياضيات المنفصلة
- ملخص شوم إيزى : مرجع رياضى لأهم القوانين والجداول
- ملخص شوم إيزى : البرمجة بلغة C++
- ملخص شوم إيزى : البرمجة بلغة JAVA
- ملخص شوم إيزى : أساسيات الكهرباء
- ملخص شوم إيزى : مبادئ الاقتصاد
- ملخص شوم إيزى : الإحصاء التجارى
- ملخص شوم إيزى : مبادئ المحاسبة
- ملخص شوم إيزى : مقدمة فى علم النفس

بارنيت ريتش حصل على دكتوراه الفلسفة من جامعة كولومبيا و J.D. من جامعة نيويورك. كان مؤسس المدرسة الثانوية للموسيقى والفنون بمدينة نيويورك وكان رئيس قسم الرياضيات فى مدرسة بروكلين التكنيكية الثانوية. كما أنه درّس بجامعة سيتى بنيويورك وكولومبيا.

فيليب أ. شميدت حصل على بكالوريوس من كلية بروكلين وكلاً من ماجستير ودكتوراه الفلسفة من جامعة سيراكيوس. هو استشارى للخدمات الأكاديمية فى كلية بريا بكتناكى وكان عميد مدرسة التعليم فى سنى بنيوالتز.

جورج ج. هادمينوس درّس فى جامعة دالاس وأجرى أبحاثاً فى المركز الطبى لجامعة ماساشوستس وجامعة كاليفورنيا بلوس أنجلوس. حصل على بكالوريوس من جامعة أنجلو ستات وكلاً من ماجستير ودكتوراه فى الفلسفة من جامعة تكساس بدالاس. هو مؤلف لعدد من الكتب فى سلسلة شوم.

المحتويات

7	الخطوط، الزوايا والمثلثات	الفصل الأول
25	التفكير الاستدلالي	الفصل الثاني
41	المثلثات المتطابقة	الفصل الثالث
47	الخطوط المتوازية، المسافات، ومجموع الزاوية	الفصل الرابع
61	أشباه المنحرف ومتوازيات الأضلاع	الفصل الخامس
69	الدوائر :	الفصل السادس
83	التماثل	الفصل السابع
95	المساحات	الفصل الثامن
101	المضلعات المنتظمة والدائرة	الفصل التاسع
111	إنشاءات	الفصل العاشر
133	صَيِّغ للمرجع	ملحق (A)
137	براهين لنظريات هامة	ملحق (B)
153	قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزي/عربي)	

الفصل الأول

الخطوط، الزوايا والمثلثات

Lines, Angles, and Triangles

فى هذا الفصل:

✓ المصطلحات الهندسية غير المعرفة:

النقطة، الخط، والمستوى

✓ القطع المستقيمة

✓ الدوائر

✓ الزوايا

✓ المثلثات

✓ أزواج الزوايا

المصطلحات الهندسية غير المعرفة:

النقطة، الخط، والمستوى

Undefined Terms of Geometry:

Point, Line, and Plane

Point

النقطة

النقطة، تمثل بدائرة مغلقة، لها موضع فقط. ليس لها طول، عرض، أو سُمك.

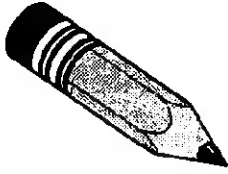
الخط

Line

الخط، يستبدل عليه بالرمز \overleftrightarrow{AB} له طول ولكن ليس له عرض أو سُمك ويمكن أن يكون الخط مستقيماً أو منحنياً أو تركيب ذلك معاً. وينتج الخط المستقيم Straight Line عن طريق تحريك نقطة في نفس الاتجاه دائماً. الخط المستقيم يمكن امتداده في أى الاتجاهين لا نهائياً. الشعاع، ويكتب \overrightarrow{AB} هو الجزء من الخط المستقيم الذى يبدأ عند نقطة معلومة ويمتد إلى حد معين فى اتجاه واحد. الخط المنحنى Curved Line ينتج عن طريق تحريك نقطة باستمرار فى اتجاهات متغيرة.

المستوى

Plane



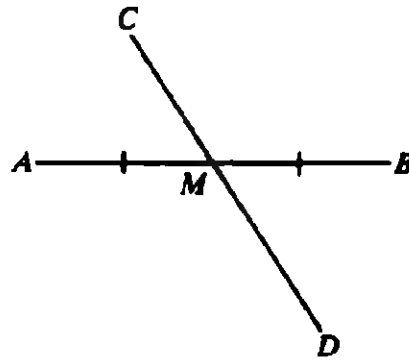
المستوى له طول وعرض وليس له سُمك. المستوى هو سطح بحيث يقع الخط المستقيم الذى يصل بين نقطتين من نقاطه بداخله كلياً.

القِطعة المستقيمة

Line Segments

- القِطعة المستقيمة، يرمز لها بالرمز \overline{AB} ، هى جزء من خط مستقيم بين أى نقطتين وتشتمل النقطتين أيضاً. إذا قسمت القِطعة المستقيمة إلى أجزاء:
1. طول القِطعة المستقيمة ككل تساوى مجموع أطوال أجزائها ويرمز لطول \overline{AB} بالرمز AB .
 2. الطول الكلى للقِطعة المستقيمة أكبر من طول أى جزء فيها.
 3. المستقيمان اللذان لهما نفس الطول يطلق عليهما متطابقان. وبالتالي، إذا كان $AB = CD$ ، إذن \overline{AB} يطابق \overline{CD} وتكتب $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. إذا قُسمت القِطعة المستقيمة إلى جزئين متساويين:

1. نقطة التقسيم هي نقطة تنصيف القطعة المستقيمة.
2. الخط الذي يمر بنقطة التنصيف يقال إنه ينصف القطعة المستقيمة.
لأن $AM = MB$ في الشكل 1-1، فإن M هي نقطة تنصيف \overline{AB} ، و \overline{CD} ينصف \overline{AB} . ويمكن تحديد الخطوط المتساوية في الطول عن طريق وضع علامات فوق الخط لها نفس الشكل والعدد. ويلاحظ أن \overline{AM} و \overline{MB} عليهما علامة واحدة.



شكل 1-1

3. إذا وقع ثلاث نقاط A ، B ، C على خط مستقيم، إذن فإنهم نقاط متسامة (واقعة على نفس الخط).
- إذا كان A ، B ، C نقاط متسامة و $AB + BC = AC$ ، إذن B تقع بين النقطة A والنقطة C [انظر الشكل 1-2].



شكل 1-2

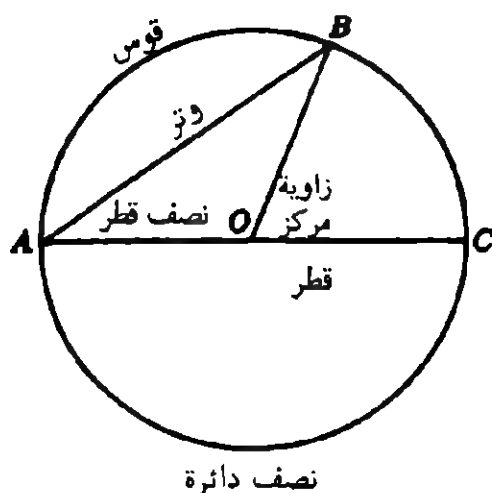
Circles

الدوائر

هي مجموعة نقاط في المستوى تبعد بُعداً ثابتاً عن مركز الدائرة.

محيط الدائرة Circumference هو المسافة حول الدائرة ويحتوى على (360°) .

نصف القطر Radius هو قطعة مستقيمة تصل مركز الدائرة بأى نقطة على الدائرة (انظر شكل 1-3).



شكل 1-3

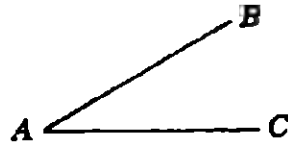
من تعريف الدائرة يمكن استنتاج أن أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.
الوتر Chord هو قطعة مستقيمة تصل بين أى نقطتين على الدائرة.
القطر Diameter هو وتر يمر بمركز الدائرة وهو أطول وتر فى الدائرة ويساوى ضعف طول نصف القطر.
القوس Arc هو جزء متصل من الدائرة. القوس الذى قياسه 1° يمثل $1/360$ من محيط الدائرة.

نصف الدائرة Semicircle عبارة عن قوس قياسه نصف محيط الدائرة وبالتالي يحتوى على 180° . القطر يقسم الدائرة إلى نصفى دائرة.
زاوية المركز Central Angle هي زاوية تتكون من نصفى قطر.
الدوائر المتطابقة Congruent Circles هي دوائر لها أنصاف أقطار متطابقة.

Angles

الزوايا

الزاوية هي الشكل المكون من شعاعين لهما نقطة نهاية مشتركة. الشعاعان هما ضلعا الزاوية، بينما نقطة النهاية هي رأس الزاوية Vertex. ويرمز للزاوية بالرمز \angle أو \sphericalangle . إذن \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} هما ضلعي الزاوية الموضحة في الشكل 1-4 و A هي رأسها.



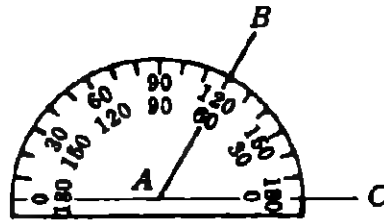
شكل 1-4

Measuring the Size of an Angle

قياس مقدار الزاوية

مقدار الزاوية يعتمد على مدى دوران أحد أضلاع الزاوية حول رأس الزاوية حتى يتلاقى مع الضلع الآخر للزاوية. ونختار الدرجات لتكون وحدة قياس الزوايا. قياس الزاوية هو عدد الدرجات التي تحتويها. سنكتب $m\angle A = 60^\circ$ للدلالة على أن قياس الزاوية A يساوي 60° .

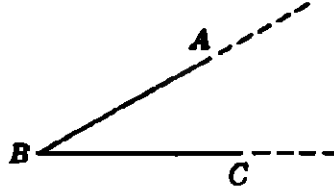
المنقلة في شكل 1-5 توضح أن قياس $\angle A$ يساوي 60° . إذا تم دوران \overrightarrow{AC} حول رأس الزاوية A حتى يتلاقى مع \overrightarrow{AB} سيكون مقدار الدوران 60° .



شكل 1-5

عند استخدام المنقلة، تأكد أن رأس الزاوية عند المركز وأن أحد الأضلاع على القطر $0^\circ - 180^\circ$.

مقدار الزاوية لا يعتمد على طول أضلاع الزاوية. مقدار $\angle B$ فى الشكل 1-6 لا يتغير إذا تم تقصير أو إطالة ضلعاها \overrightarrow{BA} و \overrightarrow{BC} .



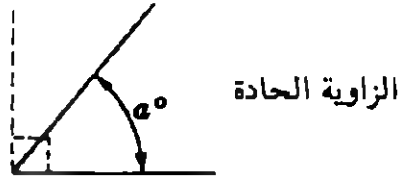
شكل 1-6

لقياس الزوايا بدقة أكثر، فإننا نقوم بقسمة الدرجة المئوية الواحدة (1°) إلى 60 جزءاً متساوياً، يطلق عليه دقائق Minutes. إذن:
الدرجة المئوية الواحدة (1°) = 60 دقيقة ($60'$) والدقيقة الواحدة ($1'$) = 60 ثانية ($60''$).

Kinds of Angles

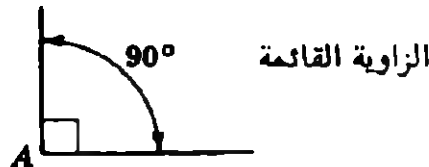
أنواع الزوايا

1. الزاوية الحادة Acute Angle: الزاوية الحادة هى زاوية قياسها أقل من 90° (انظر الشكل 1-7).



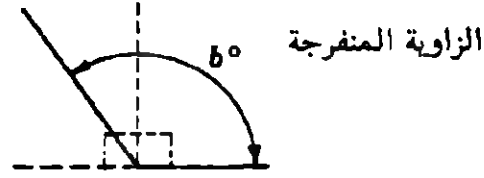
شكل 1-7

2. الزاوية القائمة Right Angle: الزاوية القائمة هى زاوية قياسها 90° (انظر الشكل 1-8).



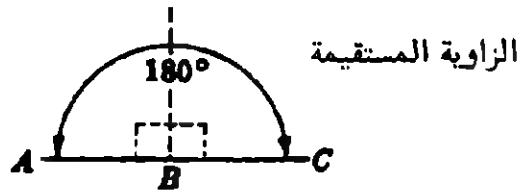
شكل 1-8

3. الزاوية المنفرجة Obtuse Angle: الزاوية المنفرجة هي زاوية قياسها أكبر من 90° وأقل من 180° (انظر الشكل 1-9).



شكل 1-9

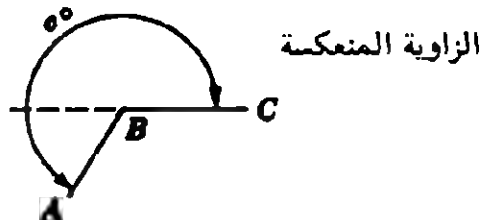
4. الزاوية المستقيمة Straight Angle: الزاوية المستقيمة هي زاوية قياسها 180° (انظر الشكل 1-10).



شكل 1-10

لاحظ أن ضلعي الزاوية المستقيمة يقعان على نفس الخط المستقيم. ولكن يجب عدم الخلط بين الزاوية المستقيمة والخط المستقيم.

5. الزاوية المنعكسة Reflex Angle: الزاوية المنعكسة هي زاوية قياسها أكبر من 180° وأقل من 360° (انظر الشكل 1-11).

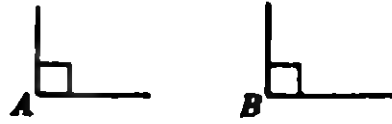


شكل 1-11

Additional Angle Facts

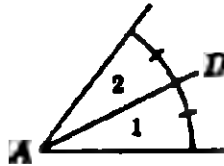
حقائق إضافية عن الزوايا

1. الزوايا المتطابقة Congruent Angles: هي زوايا لها نفس عدد الدرجات. بمعنى، $m\angle A = m\angle B$ ، إذن $\angle A \cong \angle B$ وبالتالي، في الشكل 1-12، $\angle B (rt.) \cong \angle A (rt.)$ حيث أن كلاهما قياسه 90° .



شكل 1-12

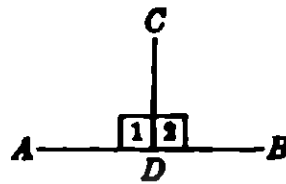
2. الخط المنصف للزاوية يقسمها إلى جزئين متطابقين. وبالتالي، في الشكل 1-13، إذا كان \overline{AD} ينصف $\angle A$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



منصف الزاوية

شكل 1-13

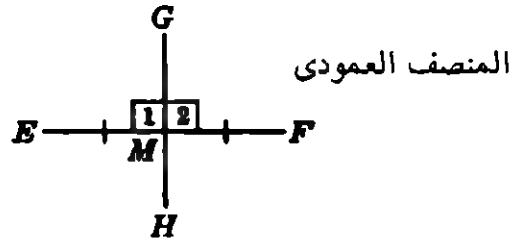
3. الأعمدة Perpendiculars هي خطوط، أشعة، أو قطع تتقابل عند زوايا قائمة. ورمز العمود هو \perp . وبالتالي، في الشكل 1-14، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ، لذلك تتكون الزاويتان القائمتان 1 و 2.



الأعمدة

شكل 1-14

4. المنصف العمودي Perpendicular Bisector لقطع معلوم هو عمودي على القطع وينصفه. وبالتالي، في الشكل 1-15، $\overline{GH} \perp \overline{EF}$ هو \perp منصف للقطعة \overline{EF} ؛ إذن $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان و M هي نقطة تنصيف \overline{EF} .

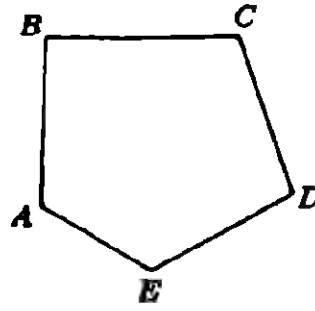


شكل 1-15

Triangles

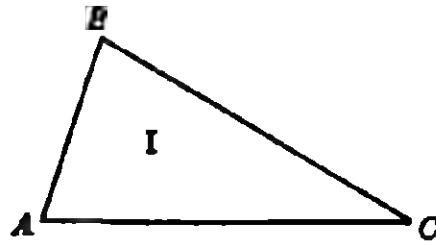
المثلثات

المضلع Polygon هو شكل مستوي مغلق محدد بقطع مستقيمة كأضلاع. إذن، الشكل 1-16 هو مضلع مكون من خمسة أضلاع ويطلق عليه الشكل الخماسي Pentagon (المخمس). ويسمى المخمس $ABCDE$ باستخدام حروفه بالترتيب.



شكل 1-16

المثلث Triangle هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع، رأس المثلث هي نقطة يتلاقى فيها ضلعي المثلث. رمز المثلث هو Δ . إذن، المثلث في الشكل 1-17 يمكن تسميته ΔABC أو ΔI ؛ وأضلاعه هي \overline{AC} ، \overline{AB} ، و \overline{BC} ؛ ورؤوسه هي A ، B ، و C ؛ وزواياه $\angle A$ ، $\angle B$ ، و $\angle C$.



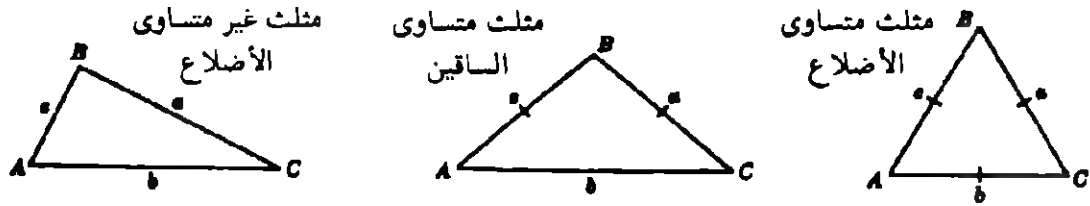
شكل 1-17

Classifying Triangles

تصنيف المثلثات

تصنف المثلثات على حسب تساوى أطوال أضلاعها أو على حسب أنواع الزوايا التى تشتمل عليها.

المثلثات على حسب تساوى أطوال أضلاعها



شكل 1-18

1. المثلث غير متساوى الأضلاع *Scalene triangle*: المثلث غير متساوى الأضلاع لا يوجد به أى أضلاع متطابقة. فى المثلث غير متساوى الأضلاع ABC ، $a \neq b \neq c$. الحرف الصغير المستخدم لطول كل ضلع يتوافق مع الحرف الكبير للزاوية المقابلة.

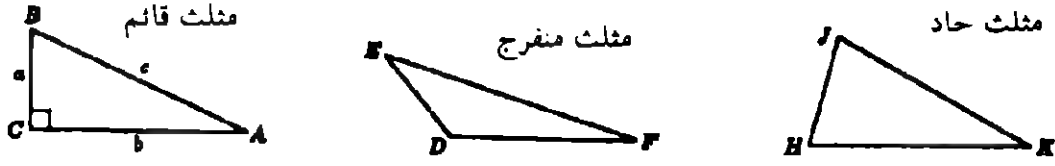


2. المثلث المتساوى الساقين *Isosceles triangle*: المثلث المتساوى الساقين هو مثلث يكون به على الأقل ضلعان متطابقان. فى المثلث المتساوى الساقين ABC ، $a = c$. هذان الضلعان يسميان ساقى المثلث المتساوى الساقين. الضلع المتبقى هو القاعدة b . الزاويتان اللتان تقعان على أى من جانبي القاعدة هما زاويتا القاعدة. الزاوية المقابلة للقاعدة هى زاوية الرأس.

3. المثلث المتساوى الأضلاع *Equilateral triangle*: المثلث المتساوى الأضلاع هو مثلث به ثلاث أضلاع متطابقة. فى المثلث المتساوى الأضلاع ABC ، $a = b = c$.

المثلث المتساوى الأضلاع هو مثلث متساوى الساقين أيضاً.

المثلثات على حسب نوع الزوايا

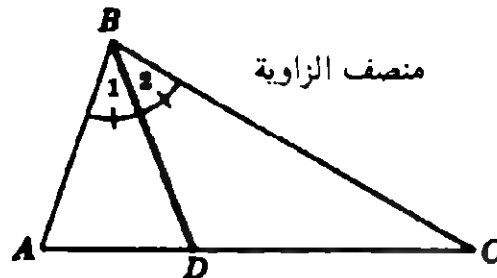


شكل 1-19

1. المثلث القائم *Right triangle*: المثلث القائم هو مثلث به زاوية قائمة. في المثلث القائم ABC ، $\angle C$ هي الزاوية القائمة. الضلع c المقابل للزاوية القائمة هو وتر المثلث. الأضلاع المتعامدة a ، b هما ساقا أو ذراعا المثلث القائم.
2. المثلث المنفرج *Obtuse triangle*: المثلث المنفرج هو مثلث به زاوية منفرجة. في المثلث المنفرج DEF ، $\angle D$ هي الزاوية المنفرجة.
3. المثلث الحاد *Acute triangle*: المثلث الحاد هو مثلث به ثلاث زوايا حادة. في المثلث الحاد HJK ، $\angle H$ ، $\angle J$ ، و $\angle K$ زوايا حادة.

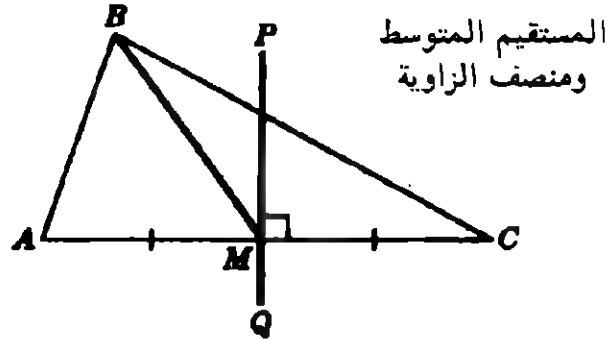
Special Lines in a Triangle خطوط خاصة في المثلث

1. منصف الزاوية للمثلث *Angle bisector of a triangle*: منصف الزاوية للمثلث هو قطعة مستقيمة أو شعاع ينصف الزاوية ويمتد إلى الضلع المقابل. إذن، \overline{BD} منصف الزاوية $\angle B$ في الشكل 1-20 ينصف $\angle B$ ويجعل $\angle 1 = \angle 2$.



شكل 1-20

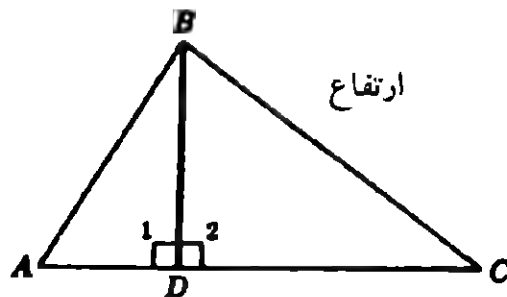
2. المستقيم المتوسط للمثلث *Median of a triangle*: المستقيم المتوسط للمثلث هو قطعة مستقيمة تمتد من الرأس وحتى نقطة التنصيف للضلع المقابل. إذن، \overline{BM} المستقيم المتوسط للضلع \overline{AC} في الشكل 1-21 ينصف \overline{AC} ويجعل $AM = MC$.



شكل 1-21

3. المنصف العمودي لضلع *Perpendicular bisector of a side*: المنصف العمودي لضلع في مثلث هو خط ينصف ويتعامد على الضلع. إذن \overleftrightarrow{PQ} المنصف العمودي للضلع \overline{AC} في الشكل 1-21 ينصف \overline{AC} وعمودي عليه.

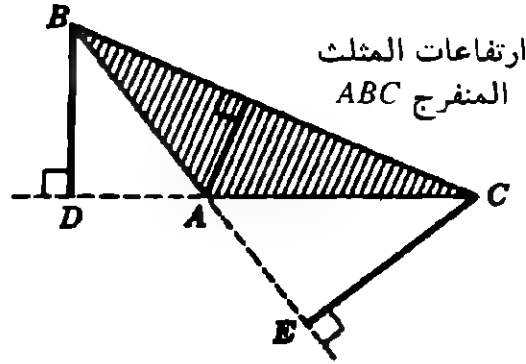
4. الارتفاع إلى ضلع مثلث *Altitude to a side of a triangle*: ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة من الرأس وعمودية على الضلع المقابل. إذن \overline{BD} الارتفاع إلى \overline{AC} في الشكل 1-22 عمودي على \overline{AC} ويكون زاويتان



شكل 1-22

قائمتان 1 و 2. كل من منصف الزاوية، المستقيم المتوسط وارتفاع المثلث يمتد من الرأس إلى الضلع المقابل.

5. ارتفاع المثلث المنفرج *Altitude of obtuse triangle*: في المثلث المنفرج، الارتفاع المرسوم على أى من جانبي الزاوية المنفرجة يقع خارج المثلث. إذن، في المثلث ABC (المظلل) في الشكل 1-23، الارتفاعان \overline{BD} و \overline{CE} يقعان خارج المثلث. في كل حالة، ضلع من أضلاع الزاوية المنفرجة يجب أن يمتد.



شكل 1-23

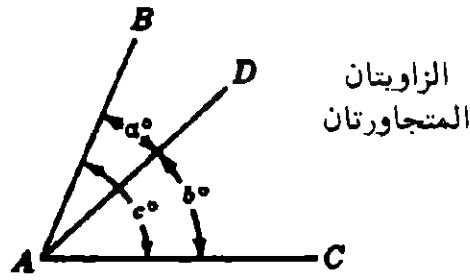
Pairs of Angles

أزواج الزوايا

Kinds of Pairs of Angles

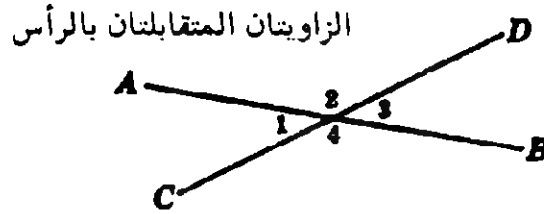
أنواع أزواج الزوايا

1. *Adjacent Angles*: الزاويتان المتجاورتان هما زاويتان لهما نفس الرأس وضلع مشترك بينهما. إذن، الزاوية c° بمجملها في الشكل 1-24 تم قطعها إلى زاويتين متجاورتين a° و b° . هاتان الزاويتان المتجاورتان لهما نفس الرأس A ، وضلع مشترك \overrightarrow{AD} بينهما. هنا، $a^\circ + b^\circ = c^\circ$.



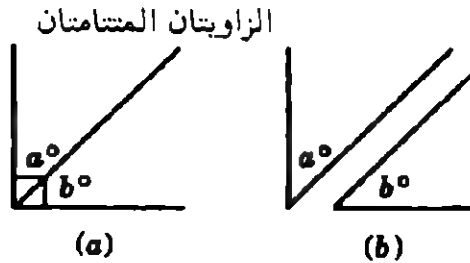
شكل 1-24

2. الزاويتان المتقابلتان بالرأس *Vertical Angles*: الزاويتان المتقابلتان بالرأس هما زاويتان غير متجاورتين تكونتا من خطين متقاطعين. إذن، $\angle 1$ و $\angle 3$ في الشكل 1-25 هما زاويتان متقابلتان بالرأس تتكونان من الخطين المتقاطعين \overline{AB} و \overline{CD} . أيضا $\angle 2$ و $\angle 4$ هما زوج آخر من الزوايا المتقابلة بالرأس متكونة من نفس الخطين.



شكل 1-25

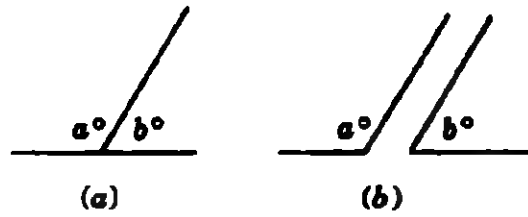
3. الزاويتان المتتامتان *Complementary Angles*: الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسهما يساوي 90° إذن، في الشكل 1-26(a) الزاويتان a° و b° هما زاويتان متجاورتان متتامتان. ومع ذلك، في (b) الزاويتان المتتامتان غير متجاورتين. في كل حالة، $a^\circ + b^\circ = 90^\circ$. أي من الزاويتين المتتامتين يقال أنه متمم للآخر.



شكل 1-26

4. الزاويتان المتكاملتان *Supplementary Angles*: الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسهما يساوى 180° . إذن، فى الشكل 27-1(a) الزاويتان a° و b° هما زاويتان متجاورتان متكاملتان. ومع ذلك، فى (b) الزاويتان المتكاملتان غير متجاورتين. فى كل حالة، $a^\circ + b^\circ = 180^\circ$. أى من الزاويتين المتكاملتين يقال أنه مكمل للآخر.

الزاويتان المتكاملتان

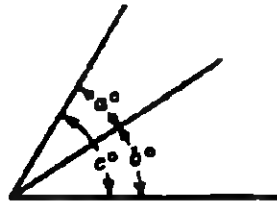


شكل 1-27

Principles of Pairs of Angles

قواعد أزواج الزوايا

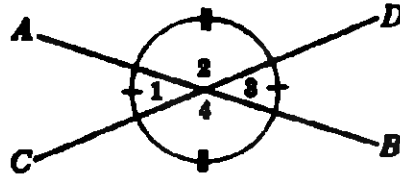
قاعدة 1: إذا تم قطع الزاوية c° إلى زاويتين متجاورتين a° و b° ، إذن $a^\circ + b^\circ = c^\circ$. بالتالى، إذا كانت $a^\circ = 25^\circ$ و $b^\circ = 35^\circ$ فى الشكل 1-28، إذن $c^\circ = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$.



شكل 1-28

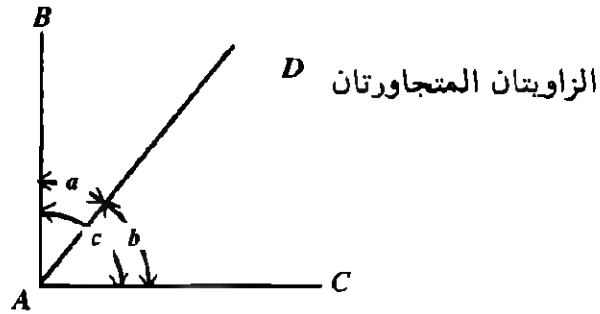
قاعدة 2: الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

بالتالى، إذا كان \vec{AB} و \vec{CD} خطان مستقيمان فى الشكل 1-29. إذن $\angle 1 \cong \angle 3$ و $\angle 2 \cong \angle 4$. من هنا، إذا كان $m\angle 1 = 40^\circ$ إذن، $m\angle 3 = 40^\circ$ وفى هذه الحالة $m\angle 2 = m\angle 4 = 140^\circ$.



شكل 1-29

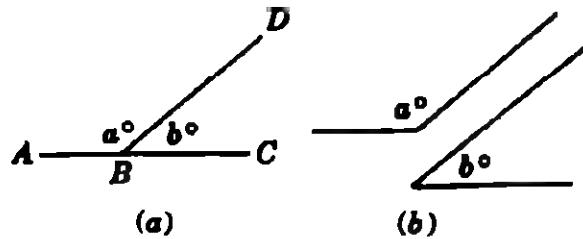
قاعدة 3: إذا كانت الزاويتان المتتامتان تحتويان a° و b° ، إذن $a^\circ + b^\circ = 90^\circ$.
 بالتالي، إذا كانت a° و b° متتامتان و $a^\circ = 40^\circ$ إذن $b^\circ = 50^\circ$.
 [انظر الشكل 1-30].



شكل 1-30

قاعدة 4: الزوايا المتجاورة متتامة إذا كانت الأضلاع الخارجية متعامدة على بعضها. إذن، في الشكل 1-30، a° و b° زاويتان متتامتان حيث أن الضلعين الخارجيين \overline{AB} و \overline{BC} متعامدين على بعضهما البعض.

قاعدة 5: إذا كانت الزاويتان المتكاملتان تحتويان a° و b° ، إذن $a^\circ + b^\circ = 180^\circ$.



شكل 1-31

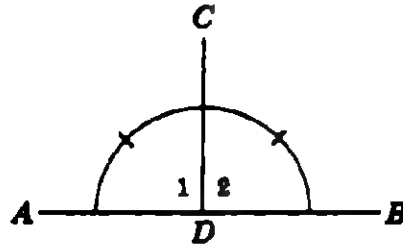
بالتالى إذا كانت الزاويتان a° و b° متكاملتين و $a^\circ = 140^\circ$ إذن $b^\circ = 40^\circ$ [انظر الشكل (a), (b) 1-31].

قاعدة 6: الزوايا المتجاورة متكاملة إذا كانت الأضلاع الخارجية تقع على نفس الخط.

بالتالى، فى الشكل (a) 1-31، a° و b° هما زاويتان متكاملتان بما أن الضلعين الخارجيين \overline{AB} و \overline{BC} يقعان على نفس الخط المستقيم \overleftrightarrow{AC} .

قاعدة 7: إذا كانت الزوايا المتكاملة متطابقة، تكون كل زاوية منهما زاوية قائمة. (الزوايا المتكاملة المتساوية زوايا قائمة).

بالتالى إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ فى الشكل 1-32 متطابقتين ومتكاملتين. إذن كل منهما زاوية قائمة.



شكل 1-32

الفصل الثانى

التفكير الاستدلالى

Deductive Reasoning

فى هذا الفصل:

- ✓ البرهان بالتفكير الاستدلالى
- ✓ التفكير الاستدلالى فى الهندسة
- ✓ تحديد الفرضية والاستنتاج
- ✓ إثبات النظرية

البرهان بالتفكير الاستدلالى

Proof by Deductive Reasoning

التفكير الاستدلالى هو برهان Deductive Reasoning is Proof



التفكير الاستدلالى يمكننا من اشتقاق استنتاجات حقيقية أو مقبولة كحقيقة من تعبيرات حقيقية أو مقبولة كحقيقة. ويتكون من ثلاثة خطوات كما يأتى:

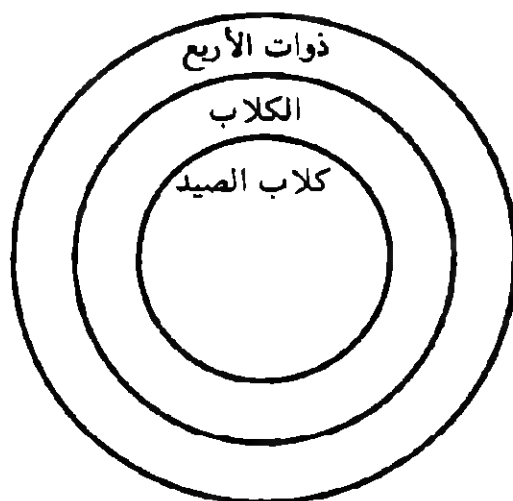
1. بناء تعبير عام General Statement يشير إلى مجموعة كاملة أو فئة من الأشياء، مثل فئة الكلاب: كل الكلاب من الحيوانات ذوات الأربع (لها أربع أرجل).

2. بناء تعبير محدد Particular Statement عن واحد أو بعض أعضاء المجموعة أو الفئة المشار إليها في التعبير العام: كل كلاب الصيد من الكلاب.

3. بناء استدلال Deduction يتبع بالمنطق عند تطبيق التعبير العام على التعبير المحدد: كل كلاب الصيد من ذوات الأربع.

التفكير الاستدلالي Syllogistic Reasoning يسمى تفكير قياسى لأن التعبيرات الثلاثة معاً يشكلون قياس منطقي. في القياس المنطقي، التعبير العام هو المقدمة الكبرى Major Premise، التعبير المحدد Minor Premise هو المقدمة الصغرى والاستدلال هو الاستنتاج Conclusion. إذن، في القياس المنطقي بأعلى:

1. المقدمة الكبرى هي: كل الكلاب من ذوات الأربع.
 2. المقدمة الصغرى هي: كل كلاب الصيد من الكلاب.
 3. الاستنتاج هو: كل كلاب الصيد من ذوات الأربع.
- استخدم دائرة كما في الشكل 1-2، لتمثيل كل مجموعة أو فئة لتساعدك على فهم العلاقات المتضمنة في التفكير الاستدلالي.



شكل 1-2

1. بما أن المقدمة الكبرى أو التعبير العام ينص على أن كل الكلاب

من ذوات الأربع، الدائرة التي تمثل الكلاب يجب أن تكون داخل دائرة ذوات الأربع.

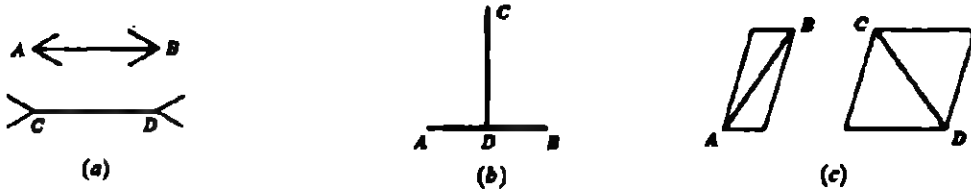
2. بما أن المقدمة الصغرى أو التعبير المحدد ينص على أن كل كلاب الصيد من الكلاب، الدائرة التي تمثل كلاب الصيد على أنهم كلاب يجب أن تكون داخل دائرة الكلاب.

3. الاستنتاج واضح. بما أن دائرة كلاب الصيد يجب أن تكون داخل دائرة ذوات الأربع، الاستنتاج الوحيد الممكن هو أن كلاب الصيد من ذوات الأربع.

الملاحظة، القياس، والتجربة ليسوا برهان

Observation, Measurement, and Experimentation Are Not Proof

1. الملاحظة Observation لا يمكن أن تخدم كبرهان. المظاهر يمكن أن تكون مضللة. لذلك، في كل جزء من الشكل 2-2، AB لا يبدو أنه يساوي CD على الرغم من أنه في الواقع يساويه.



شكل 2-2

2. القياس Measurement لا يمكن أن يخدم كبرهان. القياس يطبق فقط على العدد المحدود من الحالات المشتملة عليه. الاستنتاج الذي يعطيه ليس دقيقاً ولكنه تقريبي، يعتمد على دقة أداة القياس وعناية الملاحظ.

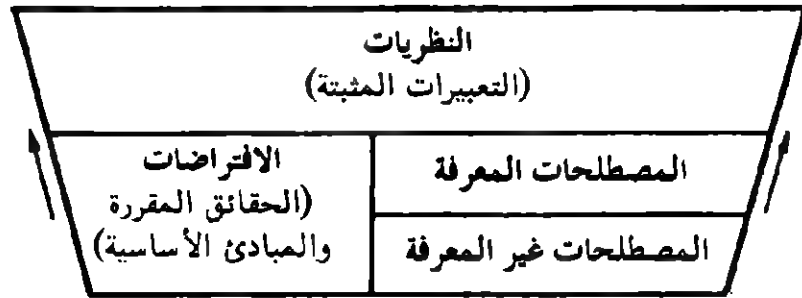
3. التجربة Experiment لا يمكن أن تخدم كبرهان. استنتاجاتها هي استنتاجات محتملة فقط. درجة الاحتمال تعتمد على الأوضاع أو المراحل المحددة التي تبحث في عملية التجربة. لذلك فإنه من

المحتمل أن يكون زوج من الزهر مُحمل إذا أظهر العدد 7 عشر مرات متتالية، والاحتمالية تكون أكبر إذا أظهر العدد 7 عشرون مرة، ومع ذلك أى الاحتمالين ليس بيقين.

التفكير الاستدلالي فى الهندسة

Deductive Reasoning in Geometry

أنواع المصطلحات والتعبيرات التى نوقشت فى هذا الجزء تؤلف التركيب الاستدلالي للهندسة والتي يمكن تصورها كما فى الشكل 2-3.

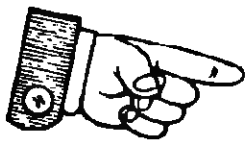


التركيب الاستدلالي للهندسة

شكل 2-3

المصطلحات غير المعرفة والمعرفة Undefined and Defined Terms

نقطة، خط، وسطح هى المصطلحات فى الهندسة التى بالاتفاق غير معرفة. هذه المصطلحات غير المعرفة تبدأ بها عملية التعريف فى الهندسة وتشكل الأساس لتعريف كل المصطلحات الهندسية الأخرى.



يمكننا تعريف المثلث بدلالة المضلع، المضلع بدلالة الشكل الهندسى، الشكل الهندسى كشكل متكون من قطع مستقيمة أو أجزاء من خطوط. ومع ذلك، عملية التعريف لا يمكن استكمالها إلى أبعد من ذلك لأن مصطلح "الخط" غير معرف.

الافتراضات (الحقائق المقررة والمبادئ الأساسية)

Assumptions (Axioms and Postulates)

التركيب الكلى للبرهان فى الهندسة يرتكز على، أو يبدأ ببعض التعبيرات العامة غير المثبتة والتي تسمى مبادئ أساسية. وهذه التعبيرات يجب علينا افتراضها أو قبولها كحقيقة تلقائياً ليكون بإمكاننا استنتاج تعبيرات أخرى. عندما نرسم خط مستقيم بين نقطتين، فإننا نبرر ذلك باستخدام المبدأ الأساسى "أى نقطتين يحددان خطاً مستقيماً واحداً وواحداً فقط" كسبب لذلك. هذا السبب هو فرض حيث أننا نعتبره صحيح بدون الاحتياج إلى مبرر أو إثبات أبعد من ذلك.

Algebraic Postulates مبادئ جبرية أساسية

مبدأ 1: الأشياء التى تساوى نفس الأشياء أو أشياء متساوية، تساوى بعضها البعض. إذا كان $a=b$ و $c=b$ ، إذن $a=c$ (مبدأ الانتقال (Transitive Postulate).

إذن، القيمة الكمية للدايم (عملة أجنبية) تساوى اثنان من النكلة (عملة أجنبية أصغر من الدايم) حيث أن كل منهما يساوى عشرة بينى (عملة أجنبية أصغر من النكلة).

مبدأ 2: أى كمية يمكن التعويض عنها بما يساويها فى أى تعبير أو معادلة (مبدأ التعويض (Substitution Postulate).

بالتالى، إذا كان $x=5$ و $y=x+3$ ، يمكننا التعويض عن x بالقيمة 5 وإيجاد $y=5+3=8$.

مبدأ 3: الكل يساوى مجموع أجزائه. (مبدأ التجزئة (Partition Postulate).

إذن، القيمة الكلية للدايم، النكلة، والبينى هى 16 سنت (عملة أجنبية).

مبدأ 4: أى كمية تساوى نفسها (مبدأ الانعكاس أو مبدأ الوحدة Reflexive (or Identity Postulate).

إذن $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB}$ و $m\angle A = m\angle A$ ، $x = x$

مبدأ 5: إذا جُمعت المتساويات على مستويات أخرى، يكون المجموع متساوياً. إذا كان $a = b$ و $c = d$ ، فإن $a + c = b + d$. (مبدأ الجمع (Addition Postulate).


$x + y = 12$	إذا كان	7 دايم = 70 سنت	إذا كان
$x - y = 8$	و	2 دايم = 20 سنت	و
$2x = 20$	إذن	9 دايم = 90 سنت	إذن

مبدأ 6: إذا طرحت المتساويات من متساويات أخرى، تكون الفروق متساوية؛ إذا كان $a = b$ و $c = d$ ، إذن $a - c = b - d$ (مبدأ الطرح (Subtraction Postulate).

$x + y = 12$	إذا كان	7 دايم = 70 سنت	إذا كان
$x - y = 8$	و	2 دايم = 20 سنت	و
$2y - 4$	إذن	5 دايم = 50 سنت	إذن

مبدأ 7: إذا تم ضرب المتساويات في متساويات أخرى، تكون نواتج الضرب متساوية؛ إذا كان $a = b$ و $c = d$ ، إذن $ac = bd$ (مبدأ الضرب (Multiplication Postulate).

إذن، إذا كان سعر كتاب واحد هو \$2، يكون سعر الثلاث كتب \$6.

ملاحظة! 

حقيقة ضرب خاصة: ضعف المتساويات متساوي.

مبدأ 8: إذا تمت قسمة المتساويات على متساويات أخرى، تكون خوارج القسمة متساوية؛ إذا كان $a = b$ و $c = d$ ، إذن $a/c = b/d$ حيث $c, d \neq 0$ (مبدأ القسمة (Division Postulate).

بالتالى، إذا كان سعر 4 lb من الزبد يساوى 80 سنت (80 cents). إذن، بنفس المعدل، سعر 2 lb يساوى 40 سنت (40 cents).

مبدأ 9: الأسس المتساوية للمتساويات تكون متساوية؛ إذا كان $a = b$ بالتالى $a^n = b^n$ (مبدأ الأسس Powers Postulate).

بالتالى، إذا كان $x = 5$ ، إذن $x^2 = 5^2$ أو $x^2 = 25$.

مبدأ 10: الجذور المتساوية للمتساويات تكون متساوية؛ إذا كان $a = b$ إذن $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

بالتالى، إذا كان $y^3 = 27$ ، إذن $y = \sqrt[3]{27} = 3$.

مبادئ هندسية أساسية Geometric Postulates

مبدأ 11: خط مستقيم واحد فقط يمكن رسمه خلال نقطتين. إذن، \overleftrightarrow{AB} هو الخط الوحيد الممكن رسمه بين A و B فى الشكل 2-4.



شكل 2-4

مبدأ 12: الخطان يمكن أن يتقاطعا عند نقطة واحدة فقط. إذن P فقط هى نقطة تقاطع \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CD} فى الشكل 2-5.



شكل 2-5

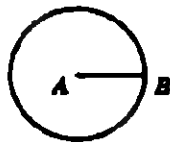
مبدأ 13: طول القطعة المستقيمة هو أقصر مسافة بين نقطتين. إذن \overline{AB} أقصر من الخط المائل أو المنكسر بين A و B فى الشكل 2-6.



شكل 2-6

مبدأ 14: دائرة واحدة فقط يمكن رسمها بنقطة معلومة كمركز وقطع مستقيم معلوم كنصف قطر.

إذن الدائرة A فقط في الشكل 2-7 يمكن رسمها بمركز A ، ونصف قطر \overline{AB} .



شكل 2-7

مبدأ 15: أى شكل هندسى يمكن تحريكه بدون التغيير فى حجمه أو شكله.

إذن، $\triangle I$ فى الشكل 2-8 يمكن تحريكه لموضع جديد بدون التغيير فى حجمه أو شكله.



شكل 2-8

مبدأ 16: القطع له نقطة تنصيف واحدة فقط.

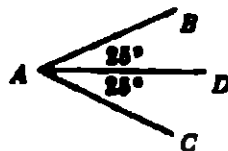
إذن، M هى نقطة تنصيف \overline{AB} فى الشكل 2-9.



شكل 2-9

مبدأ 17: الزاوية لها منصف واحد فقط.

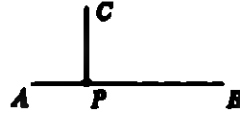
إذن، \overrightarrow{AD} فقط هو منصف $\angle A$ فى الشكل 2-10.



شكل 2-10

مبدأ 18: خلال أى نقطة على خط، عمود واحد فقط يمكن رسمه على الخط.

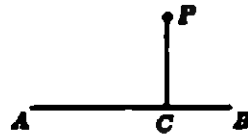
إذن $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$ فقط عند النقطة P على \overrightarrow{AB} (شكل 2-11).



شكل 2-11

مبدأ 19: خلال أى نقطة خارج الخط، عمود واحد فقط يمكن رسمه على الخط المعلوم.

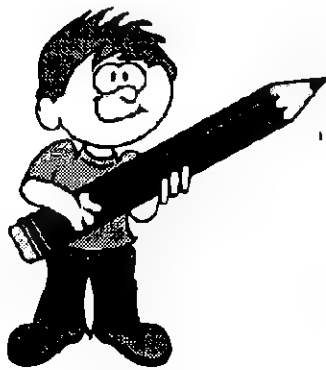
إذن، \overrightarrow{PC} فقط يمكن رسمه عمودى على \overrightarrow{AB} من النقطة P خارج \overrightarrow{AB} فى الشكل 2-12.



شكل 2-12

Theorems

نظريات



النظريات هى التعبيرات التى تم إثباتها فى الهندسة. باستخدام التعريفات، والافتراضات كأسباب فإننا نستنتج أو نثبت النظريات الأساسية. كلما استخدمنا كل نظرية جديدة لإثبات نظريات أكثر فإن عملية الاستنتاج تنمو. ومع ذلك، إذا كانت النظريات الجديدة تستخدم لإثبات نظرية سابقة، فإن التسلسل المنطقى ينتهك.

النظرية "مجموع قياس زوايا المثلث تساوى 180° " تستخدم لإثبات أن "مجموع قياس زوايا المخمس 540° ". هذا بالتبعية، يمكننا من

إثبات أن "كل زاوية من زوايا الخمس المنتظم قياسها 108° . ومع ذلك يعتبر انتهاك للتسلسل المنطقي إذا حاولنا استخدام النظرية الأخيرة لإثبات أى من الاثنتين الأولتين.

قاعدة 1: كل الزوايا القائمة متطابقة Congruent.

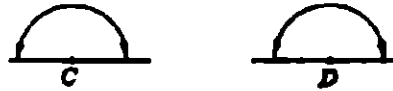
إذن $\angle A \cong \angle B$ فى الشكل 2-13.



شكل 2-13

قاعدة 2: كل الزوايا المستقيمة متطابقة.

إذن $\angle C \cong \angle D$ فى الشكل 2-14.

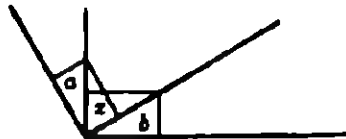


شكل 2-14

قاعدة 3: المتتمات لنفس الزاوية أو الزوايا المتطابقة تكون متطابقة. وهذا توحيد للقاعدتين الآتيتين:

1. المتتمات لنفس الزاوية متطابقة. إذن $\angle a \cong \angle b$ فى الشكل 2-15؛ كل منهما متمم $\angle x$.

2. المتتمات للزوايا المتطابقة متطابقة. إذن $\angle c \cong \angle d$ فى الشكل 2-16، متتماتهم هم الزوايا المتطابقة x و y .



شكل 2-15



شكل 2-16

قاعدة 4: المكملات لنفس الزاوية أو الزوايا المتطابقة تكون متطابقة. وهذا توحيد للقاعدتين الآتيتين:

1. المكملات لنفس الزاوية متطابقة. إذن $\angle a \cong \angle b$ في الشكل 2-17؛ كل منهما مكمل $\angle x$.

2. المكملات للزوايا المتطابقة متطابقة. إذن، $\angle c \cong \angle d$ في الشكل 2-18؛ مكملاتهم هم الزوايا المتطابقة x و y .



شكل 2-17



شكل 2-18

قاعدة 5: الزوايا المتقابلة الرأسية متطابقة.

إذن، في الشكل 2-19، $\angle a \cong \angle b$ ؛ وهذا يتبع من قاعدة 4 حيث $\angle a$ و $\angle b$ مكملات لنفس الزاوية.



شكل 2-19

تحديد الفرضية والاستنتاج

Determining the Hypothesis and Conclusion

أساليب التعبير: أسلوب المسند إليه - المسند وأسلوب إذا - إذن

Statement Forms: Subject-Predicate Form and If-Then Form

التعبيران "المعدن الذى يتعرض للتسخين يتمدد" و "إذا تعرض المعدن للتسخين، إذن، فإنه يتمدد" هما أسلوبان لنفس الفكرة. الجدول التالى يوضح كيف يمكن تقسيم كل أسلوب إلى جزئين مهمين وهما الفرضية Hypothesis والتي توضح ما هو معطى، والاستنتاج Conclusion والذي يوضح ما هو مطلوب إثباته. لاحظ أن، فى أسلوب إذا - إذن (if-then)، الكلمة إذن (then) يمكن حذفها.

أسلوب	الفرضية (ما هو معطى)	الاستنتاج (ما هو مطلوب إثباته)
أسلوب المسند إليه - المعدن الذى يسخن يتمدد	الفرضية هي المسند إليه المعدن الذى يسخن	الاستنتاج هو المسند يتمدد
أسلوب إذا - إذن إذا سخن المعدن، إذن فإنه يتمدد	الفرضية هي جملة إذا إذا سخن الحديد	الاستنتاج هو جملة إذن إذن فإنه يتمدد

Converse of a Statement

مقلوب التعبير



مقلوب التعبير يتكون عن طريق تبديل الفرضية والاستنتاج. لتكوين مقلوب التعبير إذا - إذن بَدِّل عبارة إذا وعبارة إذن. وفى حالة المسند إليه - المسند بدل المسند إليه والمسند.

إذن مقلوب "المثلثات أشكال مضلعة" هو "الأشكال المضلعة

مثلثات". أيضاً، مقلوب "إذا تم تسخين المعدن، إذن فإنه يتمدد" هو "إذا تمدد المعدن، إذن فإنه تم تسخينه". لاحظ إنه فى كل من هذه الأحوال التعبيرات صحيحة ، لكن مقلوبها ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً.

قاعدة 1: مقلوب التعبير الصحيح ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً. إذن، التعبير "المثلثات أشكال مضلعة" صحيح ومقلوبه ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً.

قاعدة 2: مقلوب التعريف دائماً صحيح. إذن، مقلوب التعريف "المثلث هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع" هو "المضلع المكون من ثلاثة أضلاع هو مثلث" كلاً من التعريف ومقلوبه صحيحين.

مسألة محلولة 2.1: عين الفرضية والاستنتاج لكل تعبير.

Solved Problem 2-1. Determine the hypothesis and conclusion of each statement.

التعابير	الحلول
	الفرضية (المسند إليه) الاستنتاج (المسند)
(a) الأعمدة تكون زوايا قائمة.	الأعمدة تكون زوايا قائمة
(b) متممات نفس الزاوية متطابقة.	متممات نفس الزاوية متطابقة
(c) المثلث المتساوى الأضلاع متساوى الزوايا.	المثلث المتساوى الأضلاع متساوى الزوايا
(d) المثلث القائم الزاوية به زاوية قائمة واحدة.	المثلث القائم به زاوية قائمة واحدة
(e) المثلث ليس شكل رباعى.	المثلث ليس شكل رباعى

مسألة محلولة 2-2: عين الفرضية والاستنتاج لكل تعبير.

Solved Problem 2-2. Determine the hypothesis and conclusion of each statement.

التعابير	الحلول
(الفرضية (جملة إذا) (الاستنتاج (جملة إذن)	
(a) إذا نصف خط زاوية، إذن فهو يقسم الزاوية إلى جزئين متطابقين.	إذا نصف خط زاوية إذن، فهو يقسم الزاوية إلى جزئين متطابقين.
(b) المثلث يكون به زاوية منفرجة إذا كان مثلث منفرجاً.	إذا كان المثلث منفرجاً (إذن) المثلث يكون به زاوية منفرجة.
(c) إذا كانت الطالبة مريضة، يجب ألا تذهب إلى المدرسة.	إذا كانت الطالبة مريضة (إذن) يجب ألا تذهب إلى المدرسة.
(d) الطالب، إذا كان يتمنى أن ينجح، يجب أن يذاكر بانتظام.	إذا كان يتمنى أن ينجح (إذن) الطالب يجب أن يذاكر بانتظام.

Proving a Theorem

إثبات النظرية

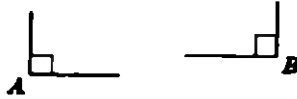
النظرية يجب أن تثبت باستخدام إجراء الخطوة بخطوة التالي. أسلوب البرهان موضح في المثال الذي يلي الإجراء.

1. قسم النظرية إلى فرضيتها (ما هو معطى) واستنتاجها (ما هو مطلوب إثباته) خطط الفرضية بخط واحد، والاستنتاج بخط مزدوج.
2. على أحد الجوانب ارسم شكلاً توضيحياً به علامات. العلامات على الشكل التوضيحي يجب أن تشمل على رموز مساعدة مثل جوانب المربع للزوايا القائمة، رموز التساوى للأجزاء المتساوية. وعلامات استفهام للأجزاء المطلوب إثبات أنها متساوية.

3. على الجانب الآخر، بجانب الشكل التوضيحي، اذكر ما هو معطى وما هو مطلوب إثباته. "المعطى" و"المطلوب إثباته" يجب أن يشيران إلى أجزاء الشكل التوضيحي.
4. اعرض خطة. على الرغم من أنه ليس أساسى، ولكنه ينصح بعمل خطة. يجب أن تذكر الأساليب الرئيسية للبرهان التى ستستخدم.
5. على الجانب الأيسر، اذكر التعبيرات فى خطوات مرقمة متتالية. التعبير الأخير يجب أن يكون المطلوب إثباته. كل التعبيرات يجب أن تشير إلى أجزاء فى الشكل التوضيحي.
6. على الجانب الأيمن، بجانب التعبيرات، أوجد سبب لكل تعبير. الأسباب المقبولة فى إثبات النظرية تعطى كحقائق، تعريفات، مبادئ أساسية، نظريات مفترضة، ونظريات مثبتة مسبقاً.

الخطوة 1: أثبت: كل الزوايا القائمة قياسها متساوى

الخطوة 2 و 3: معطى: $\angle A$ و $\angle B$ زوايا قائمة.



إثبات أن $m \angle A = m \angle B$

الخطوة 4: الخطة: حيث أن كل زاوية تساوى 90° ,

الزوايا متساوية فى قياسها باستخدام

المبدأ الأساسى 1: الأشياء المساوية

لنفس الأشياء تكون مساوية لبعضها

البعض.

الخطوة 5 و 6:

التعبيرات	الأسباب
1. $m \angle A$ و $m \angle B$ زوايا قائمة	1. معطى
2. كل من $m \angle A$ و $m \angle B = 90^\circ$	2. $m(\text{rt. } \angle) = 90^\circ$
3. $m \angle A = m \angle B$	3. الأشياء = نفس الشيء = بعضها البعض.

مسألة محلولة 2-3. استخدم أسلوب البرهان لإثبات أن مكملات الزوايا المتساوية لها قياس متساوٍ.

Solved Problem 2-3. Use the proof procedure to prove that supplements of angles of equal measure have equal measure.

الخطوة 1: أثبت: مكملات الزوايا المتساوية لها قياس متساوٍ.

الخطوة 2 و 3: معطى: $\angle a$ مكمل $\angle 1$ ، $\angle b$ مكمل $\angle 2$.



إثبات أن $m\angle 1 = m\angle 2$ أن $m\angle a = m\angle b$.

الخطوة 4: باستخدام مبدأ الطرح، قياسات الزاوية

المتساوية يمكن طرحها من مجموع

القياسات المتساوية لأزواج الزوايا المتكاملة.

البواقي المتساوية هي قياسات المتكاملات.

الخطوة 5 و 6:

التعبيرات	الأسباب
1. $\angle a$ مكمل $\angle 1$ ، $\angle b$ مكمل $\angle 2$.	1. معطى
2. $m\angle a + m\angle 1 = 180^\circ$	2. الزوايا المتكاملة هي مجموع الزوايا التي قياسها $= 180^\circ$.
3. $m\angle b + m\angle 2 = 180^\circ$	3. الأشياء = نفس الشيء = بعضها البعض.
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. معطى
5. $m\angle a = m\angle b$	5. إذا طرحت = من =، الفروق تكون =.

الفصل الثالث

المثلثات المتطابقة

Congruent Triangles

فى هذا الفصل:

✓ المثلثات المتطابقة

✓ المثلثات المتساوية الساقين والمتساوية الأضلاع

المثلثات المتطابقة

Congruent Triangles

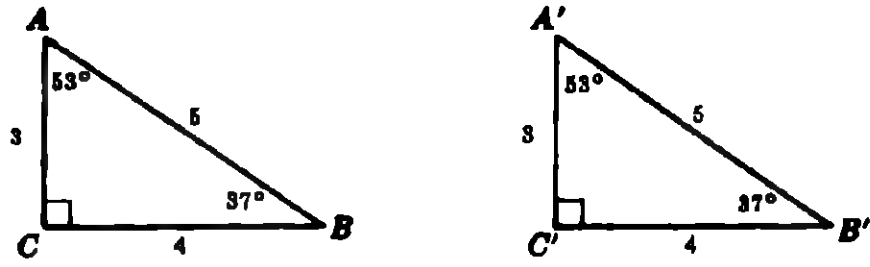
الأشكال المتطابقة هى أشكال لها نفس الحجم ونفس الشكل أى أنها نسخ مطابقة تماماً لبعضها البعض. هذه الأشكال تتطابق بحيث تكون أجزاؤها المتناظرة مطابقة لبعضها. الدائرتان اللتان لهما نفس نصف القطر متطابقتان.

المثلثات المتطابقة هى مثلثات لها نفس الأبعاد ونفس الشكل. إذا تطابق مثلثان، فإن أضلاعهما وزواياهما المتناظرة يجب أن تكون متطابقة. إذن، المثلثان المتطابقان ABC و $A'B'C'$ فى الشكل 3-1 لهم أضلاع متناظرة متطابقة.

$$(AB \cong A'B', BC \cong B'C', AC \cong A'C')$$

وزوايا متناظرة متطابقة

$$(\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C')$$

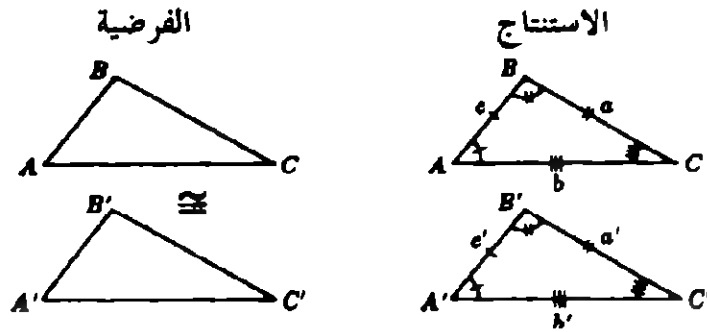


شكل 3-1

قواعد أساسية للمثلثات المتطابقة

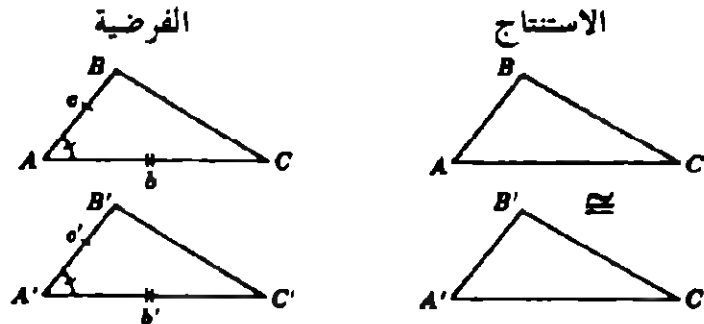
Basic Principles of Congruent Triangles

قاعدة 1: إذا تطابق مثلثان فإن أجزأهما المتناظرة متطابقة (الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة تكون متطابقة)



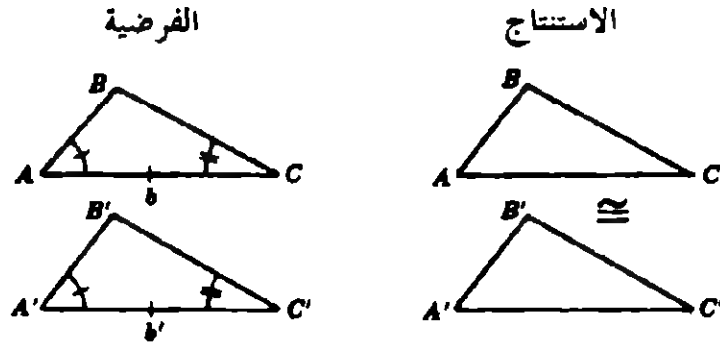
شكل 3-2

قاعدة 2: (s.a.s \equiv s.a.s) إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما لأحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر، فإن المثلثين يكونان متطابقين.



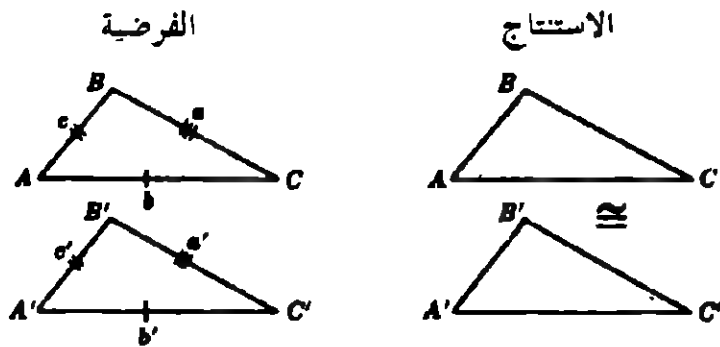
شكل 3-3

قاعدة 3: (a.s.a \cong a.s.a) إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر، فإن المثلثين يكونان متطابقين.



شكل 3-4

قاعدة 4: (s.s.s \cong s.g.s) إذا تطابق الثلاثة أضلاع في أحد المثلثين مع نظائرها في المثلث الآخر، فإن المثلثين يكونان متطابقين.



شكل 3-5

مسألة محلولة 3-1. أثبت أنه إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متساوية وتم رسم خط قطري، تتكون زوايا متساوية بين الخط القطري والأضلاع.

Solved Problem 3-1. Prove that if the opposite sides of a quadrilateral are equal and a diagonal is drawn, equal angles are formed between the diagonal and the sides.

الحل

إذا كانت الأضلاع المقابلة في الشكل الرباعي متطابقة وتم رسم خط قطري،

تتكون زوايا متطابقة بين الخط القطري والأضلاع

المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$ ،

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ و } \overline{BC} \cong \overline{AD}$$

\overline{AC} خط قطري.

إثبات أن: $\angle 1 \cong \angle 4$ و $\angle 2 \cong \angle 3$.

الخطوة: إثبات أن $\Delta I \cong \Delta II$

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	1. معطى
2. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	2. خاصية الانعكاس
3. $\Delta I \cong \Delta II$	3. $S.S.S \cong S.S.S$
4. $\angle 1 \cong \angle 4$ و $\angle 2 \cong \angle 3$	4. الأجزاء المتناظرة للـ $\Delta \cong$ تكون \cong .

المثلثات المتساوية الساقين والمتساوية الأضلاع

Isosceles and Equilateral Triangles

قواعد المثلثات المتساوية الساقين والمتساوية الأضلاع

Principles of Isosceles and Equilateral Triangles

قاعدة 1: إذا تطابق ضلعان لمثلث، تكون الزوايا المقابلة لهذين الضلعين متطابقة (زوايا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقة).

قاعدة 2: إذا تطابقت زاويتان لمثلث. تكون الأضلاع المقابلة لهاتين الزاويتين متطابقة (القاعدة 2 هي مقلوب القاعدة 1).

قاعدة 3: المثلث المتساوي الأضلاع هو مثلث متساوي الزوايا

(القاعدة 3 هي نتيجة للقاعدة 1). النتيجة للنظرية هي نظرية أخرى بحيث أن مضمونها وإثباتها يتبع النظرية الأصلية.
قاعدة 4: المثلث المتساوي الزوايا هو مثلث متساوي الأضلاع (القاعدة 4 هي مقلوب القاعدة 3 ونتيجة للقاعدة 2).
مسألة محلولة 3-2. أثبت أن منصف زاوية الرأس لمثلث متساوي الساقين هو المستقيم المتوسط للقاعدة.

Solved Problem 3-2. Prove that the bisector of the vertex angle of an isosceles triangle is a median to the base.

الحل

منصف زاوية الرأس لمثلث متساوي الساقين هو المستقيم المتوسط للقاعدة.

المعطيات: مثلث متساوي الساقين $\triangle ABC$

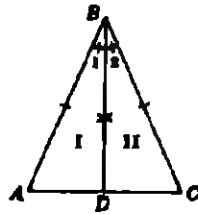
$$(\overline{AB} \cong \overline{BC})$$

\overline{BD} ينصف $\angle B$

إثبات أن: \overline{BD} المستقيم المتوسط لـ \overline{AC} .

الخطوة: إثبات أن $\triangle I \cong \triangle II$ لإيجاد $\overline{AD} \cong \overline{DC}$.

البرهان:



الأسباب	التعابير
1. معطى	1. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
2. معطى	2. \overline{BD} ينصف $\angle B$
3. التصنيف هو التقسيم إلى جزئين متطابقين.	3. $\angle 1 = \angle 2$
4. خاصية الانعكاس.	4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$
5. s.a.s \cong s.a.s	5. $\triangle I \cong \triangle II$
6. الأجزاء المتناظرة للـ $\triangle \cong$ تكون \cong .	6. $\overline{AD} \cong \overline{DC}$
7. الخط من رأس \triangle ومنصف للضلع المقابل هو مستقيم متوسط.	7. \overline{BD} المستقيم المتوسط لـ \overline{AC}

الفصل الرابع

الخطوط المتوازية، المسافات، ومجموع الزاوية

Parallel Lines, Distances, and Angle Sums

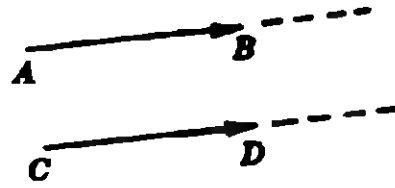
فى هذا الفصل:

- ✓ الخطوط المتوازية
- ✓ المسافات
- ✓ مجموع قياس زاويا المثلث
- ✓ مجموع قياس زاويا المضلع
- ✓ نظريتان جديدتان للتطابق

Parallel Lines

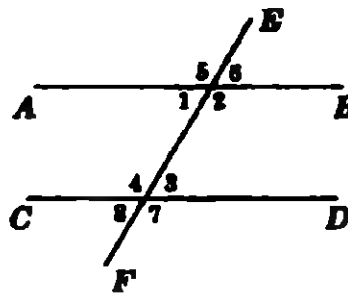
الخطوط المتوازية

الخطوط المتوازية هى خطوط تقع فى نفس المستوى ولا تتقاطع أبداً هما طال امتدادها. رمز التوازي هو $//$. إذن، $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ تُقرأ "الخط \overrightarrow{AB} موازى للخط \overrightarrow{CD} " (انظر الشكل 4-1).



شكل 4-1

الخط المستعرض Transversal لخطين أو أكثر هو الخط الذي يقطع هذه الخطوط. إذن \overleftrightarrow{EF} هو خط مستعرض للخطين \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CD} ، في الشكل 4-2.



شكل 4-2

الزوايا الداخلية Interior Angles المتكونة من خطين يقطعهما خط مستعرض هي الزوايا بين هذين الخطين، بينما الزوايا الخارجية Exterior Angles هي الزوايا الواقعة خارج الخطين. إذن من الثماني زوايا المتكونة من \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CD} يقطعهما \overleftrightarrow{EF} في الشكل 4-2، الزوايا الداخلية هم $\angle 1$ ، $\angle 2$ ، $\angle 3$ ، $\angle 4$ والزوايا الخارجية هم $\angle 5$ ، $\angle 6$ ، $\angle 7$ ، $\angle 8$.

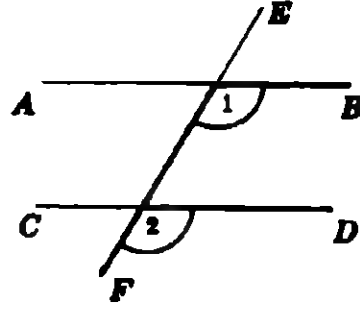
أزواج الزوايا المتكونة من خطين يقطعهما خط مستعرض

Pairs of Angles Formed by Two Lines Cut by a Transversal

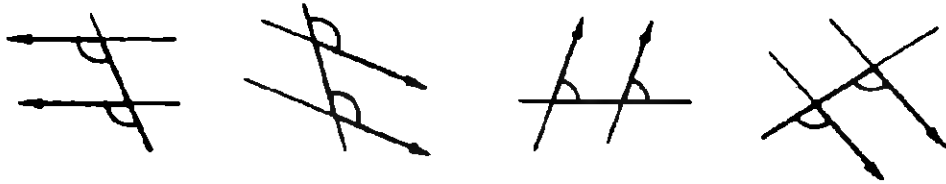


الزوايا المتتامة Corresponding Angles لخطين يقطعهما خط مستعرض هي زوايا على نفس الجانب من الخط المستعرض وعلى نفس الجانب من الخطين. إذن، $\angle 1$ و $\angle 2$ في الشكل 4-3 هما زاويتان متتامتان للخطين \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CD} يقطعهما الخط

المستعرض \overleftrightarrow{EF} . عندما يقطع خط مستعرض خطين متوازيين فإن أضلاع الزاويتين المتتامتين يكونان حرف F في أوضاع مختلفة كما هو موضح في الشكل 4-4.

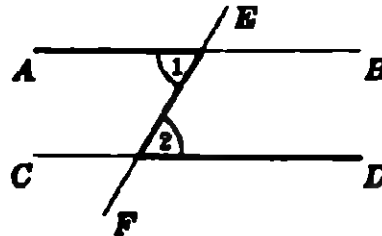


شكل 4-3

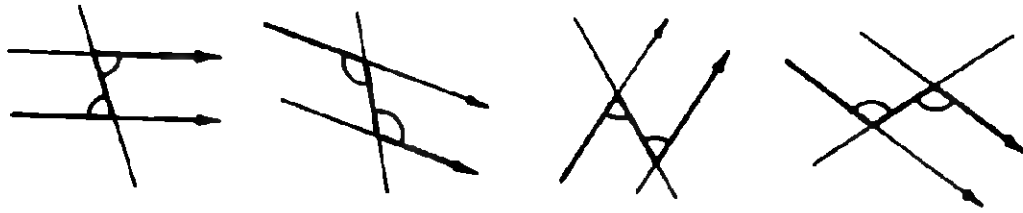


شكل 4-4

الزوايا الداخلية المتبادلة Alternate Interior Angles لخطين يقطعهما خط مستعرض هما زاويتان غير متجاورتين بين الخطين وعلى جوانب عكسية من الخط المستعرض. إذن $\angle 1$ و $\angle 2$ في الشكل 4-5 هما زاويتان داخليتان متبادلتان للخطين \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CD} يقطعهما \overleftrightarrow{EF} . عندما يقطع خط مستعرض خطين متوازيين فإن جانبي الزاويتين الداخليتين المتبادلتين يكونان حرف Z أو N في أوضاع مختلفة كما هو موضح في الشكل 4-6.

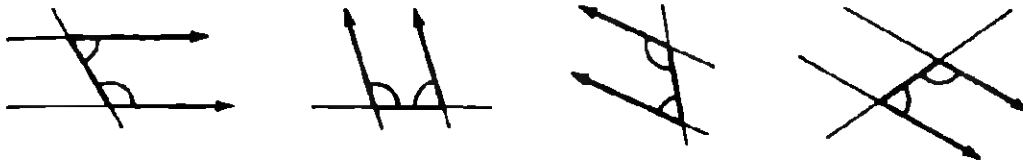


شكل 4-5



شكل 4-6

عندما يقطع خط مستعرض خطين متوازيين فإن الزوايا الداخلية على نفس الجانب من الخط المستعرض، يمكن تحديدها عن طريق حرف U المتكون من الأضلاع (شكل 4-7).



شكل 4-7

Principles of Parallel Lines

قواعد الخطوط المتوازية

قاعدة 1: إذا كان معطى نقطة وخط مستقيم بحيث لا تقع النقطة على هذا الخط، يوجد خط واحد فقط يمكن رسمه من خلال هذه النقطة بحيث يوازي الخط المستعرض (مبدأ الخط المتوازي Parallel Line Postulate).

قاعدة 2: يكون الخطان متوازيين إذا كان زوج الزوايا المتناظرة متطابقة.

قاعدة 3: يكون الخطان متوازيين إذا كان زوج الزوايا المتبادلة الداخلية متطابقة.

قاعدة 4: يكون الخطان متوازيين إذا كان زوج الزوايا الداخلية على نفس الجانب من الخط المستعرض متكاملة.

قاعدة 5: تكون الخطوط متوازية إذا كانت عمودية على نفس الخط
(الأعمدة على نفس الخط متوازية)

قاعدة 6: تكون الخطوط متوازية إذا كانت موازية لنفس الخط
(المتوازيات لنفس الخط هي خطوط متوازية).

قاعدة 7: إذا كان الخطان متوازيين، فإن كل زوج من الزوايا المتناظرة
متطابق (الزوايا المتناظرة للخطوط المتوازية متطابقة).

قاعدة 8: إذا كان الخطان متوازيين، يكون كل زوج من الزوايا
المتبادلة الداخلية متطابق (الزوايا المتبادلة الداخلية
للخطوط المتوازية متطابقة).

قاعدة 9: إذا كان الخطان متوازيين، يكون كل زوج من الزوايا
الداخلية على نفس الجانب من الخط المستعرض متكاملة.

قاعدة 10: إذا كانت الخطوط متوازية، الخط العمودي على أحد هذه
الخطوط يكون عمودي على الخطوط الأخرى أيضاً.

قاعدة 11: إذا كانت الخطوط متوازية، الخط الموازي لأحد هذه
الخطوط يكون موازياً للخطوط الأخرى أيضاً.

قاعدة 12: إذا كانت أضلاع زاويتين موازيتين لبعضهما على التوالي،
تكون الزاويتان متطابقتين أو متكاملتين.

Distances

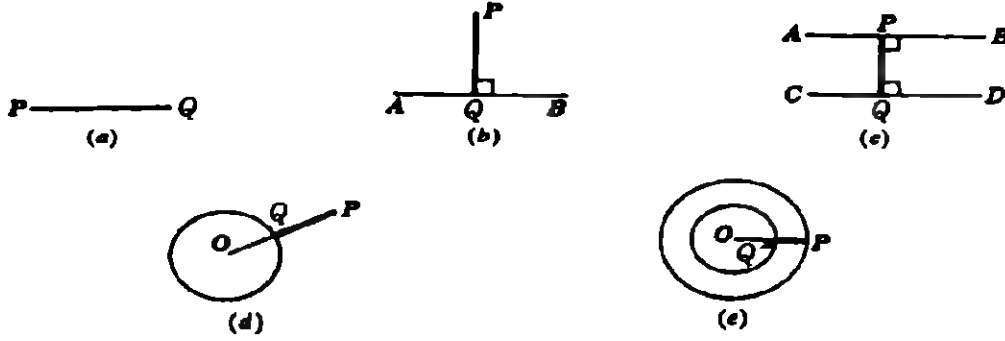
المسافات

المسافات بين شكلين هندسيين

Distances Between Two Geometric Figures

المسافة بين شكلين هندسيين هي أقل طول قطعة مستقيمة بين هذين
الشكلين.

1. المسافة بين نقطتين مثل P و Q فى الشكل (a) 4-8 هى القطعة المستقيمة \overline{PQ} بينهما.



شكل 4-8

2. المسافة بين نقطة وخط مثل P و \overleftrightarrow{AB} فى الشكل (b) 4-8 هى القطعة المستقيمة \overline{PQ} العمودى من النقطة على الخط.

3. المسافة بين خطين متوازيين، مثل \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CD} فى الشكل (c) 4-8 هى القطعة المستقيمة \overline{PQ} العمودى بين المتوازيين.

4. المسافة بين نقطة ودائرة، مثل P والدائرة فى الشكل (d) 4-8 هى القطعة المستقيمة \overline{PQ} والتى تمثل جزء من القطعة \overline{OP} بين النقطة والدائرة.

5. المسافة بين دائرتين متحذتى المركز، مثل الدائرتان اللتان مركزهما O هى القطعة المستقيمة \overline{PQ} ، وهو القطع لنصف القطر الأكبر الذى يقع بين الدائرتين كما هو موضح فى الشكل (e) 4-8.

Distance Principles

قواعد المسافات

قاعدة 1: إذا كانت النقطة تقع على العمود المنصف لقطعة مستقيمة، إذن فإن النقطة تقع على بُعدٍ متساوٍ من نهايتى القطعة المستقيمة.

قاعدة 2: إذا كانت النقطة على بُعدٍ متساوٍ من نهايتى القطعة المستقيمة، إذن النقطة تقع على العمود المنصف للقطعة المستقيمة (قاعدة 2 هى مقلوب القاعدة 1).

قاعدة 3: إذا كانت النقطة تقع على منصف الزاوية، إذن فهي على بُعد متساوٍ من أضلاع الزاوية.

قاعدة 4: إذا كانت النقطة على بُعد متساوٍ من أضلاع الزاوية، إذن النقطة تقع على الخط المنصف للزاوية (القاعدة 4 هي مقلوب القاعدة 3).

قاعدة 5: نقطتان كلاهما على بُعد متساوٍ من نهايتي الخط المستقيم يعرفان بالعمود المنصف للقطع المستقيم. (الخط الواصل بين رؤوس مثلثين متساويي الساقين لهما قاعدة مشتركة هو العمود المنصف للقاعدة).

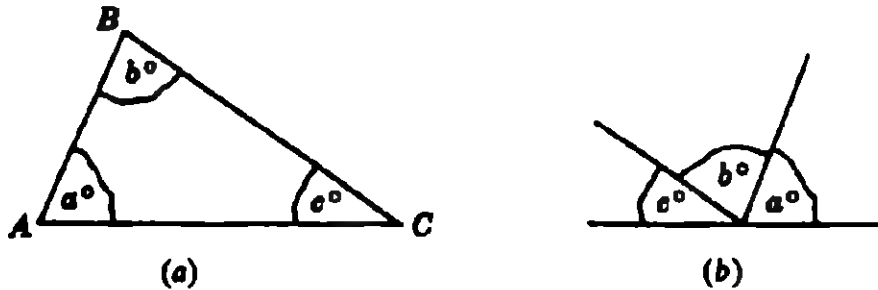
قاعدة 6: الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث تتقابل في نقطة على بُعد متساوٍ من رؤوس المثلث.

قاعدة 7: منصفات زوايا المثلث تتقابل في نقطة تقع على بُعد متساوٍ من أضلاع المثلث.

مجموع قياس زوايا المثلث

Sum of the Measures of the Angles of a Triangle

زوايا أى مثلث يمكن تقطيعها كما فى الشكل (a) 4-9 ثم تجميعها معاً كما فى الشكل (b). الثلاث زوايا سيكونوا زاوية مستقيمة.



شكل 4-9

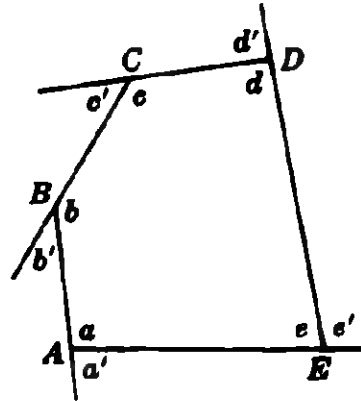


يمكننا إثبات أن مجموع قياس زوايا المثلث تساوى 180° عن طريق رسم خط من خلال أحد رؤوس المثلث يوازي الضلع المقابل للرأس في الشكل 4-9، \overrightarrow{MN} رسم خلال B موازياً للخط AC . لاحظ أن قياس الزاوية المستقيمة عند B يساوى مجموع قياس زوايا $\triangle ABC$ معنى $a^\circ + b^\circ + c^\circ = 180^\circ$. كل زوج من الزوايا المتطابقة يمثل زوج من الزوايا المتبادلة الداخلية للخطوط المتوازية.

الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع

Interior and Exterior Angles of a Polygon

الزاوية الخارجة للمضلع تتكون عن طريق مد أحد الأضلاع خلال رأس من رؤوس المضلع . إذا تم مد كل ضلع من أضلاع المضلع كما هو موضح بالشكل 4-10 ستتكون زاوية خارجة عند كل رأس. كل زاوية خارجة من هذه الزوايا هي الزاوية المكملة لزاويتها الداخلة المتبادلة.



شكل 4-10

إذن، في حالة الخماسي $ABCDE$ سيكون هناك خمس زوايا خارجة، واحدة عند كل رأس. لاحظ أن كل زاوية خارجة هي زاوية مكملة لزاوية داخلية متبادلة. مثال $m\angle a + m\angle a' = 180^\circ$.

قواعد مجموع - قياس - الزاوية

Angle-Measure-Sum Principles

- قاعدة 1: مجموع قياس زوايا المثلث تساوى قياس الزاوية المستقيمة.
- قاعدة 2: إذا تطابقت زاويتان لمثلث مع زاويتين لمثلث آخر على التوالي، فإن الزوايا المتبقية تكون متطابقة.
- قاعدة 3: مجموع قياس زوايا الشكل الرباعى تساوى 360° .
- قاعدة 4: قياس كل زاوية خارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.
- قاعدة 5: مجموع قياس الزوايا الخارجة لمثلث تساوى 360° .
- قاعدة 6: قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع تساوى 60° .
- قاعدة 7: الزوايا الحادة لمثلث قائم هي زوايا متتامة.
- قاعدة 8: قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الساقين تساوى 45° .
- قاعدة 9: المثلث لا يمكن أن يحتوى على أكثر من زاوية قائمة واحدة.
- قاعدة 10: المثلث لا يمكن أن يحتوى على أكثر من زاوية منفرجة واحدة.
- قاعدة 11: الزاويتان تكونان متطابقتين أو متكاملتين إذا كانت أضلاعهما على التوالي متعامدة على بعضها البعض.

مجموع قياس زوايا المضلع

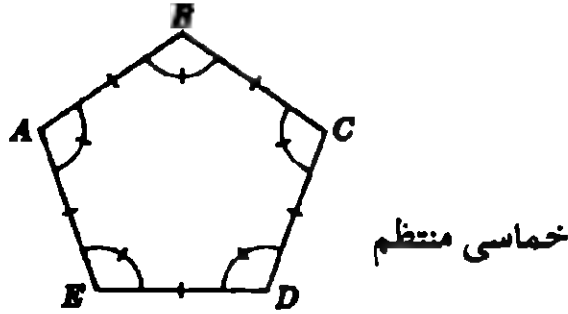
Sum of the Measures of the Angles of a Polygon

المضلع هو شكل مسطح مغلق محاط بقطع مستقيمة كأضلاع. يعتبر n -gon مضلع من n ضلع. إذن، المضلع المكون من 20 ضلعاً هو 20-gon.

أسماء المضلعات طبقاً لعدد الأضلاع

عدد الأضلاع	المضلع	عدد الأضلاع	المضلع
3	مثلث	8	مثمّن
4	رباعي	9	تساعي
5	خماسي	10	معشر
6	سداسي (مسدس)	12	اثني عشرى
7	سباعي	n	n -gon

المضلع المنتظم Regular Polygon هو مضلع متساوى الأضلاع والزوايا. إذن، الخماسي المنتظم هو مضلع به 5 زوايا متطابقة و 5 أضلاع متطابقة (شكل 4-11). المربع هو مضلع منتظم مكون من 4 أضلاع.



شكل 4-11

مجموع قياس الزوايا الداخلة لمضلع

Sum of the Measures of the Interior Angles of a Polygon

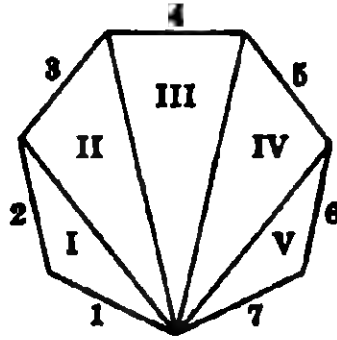
عن طريق رسم الخطوط القطرية من أى رأس إلى الرؤوس الأخرى كما فى الشكل 4-12، المضلع المكون من 7 أضلاع يمكن تقسيمه إلى 5 مثلثات. لاحظ أن كل مثلث له ضلع واحد من المضلع عدا المثلثين الأول والأخير لهما ضلعان من أضلاع المضلع.

بوجه عام، هذه العملية ستقسم المضلع المكون من n ضلع إلى $n-2$ مثلث. بمعنى أن عدد هذه المثلثات دائماً أقل من عدد أضلاع المضلع باثنين.

مجموع قياس الزوايا الداخلة للمضلع تساوى مجموع قياس الزوايا الداخلة للمثلث.

ملاحظة:

مجموع قياس الزوايا الداخلة للمضلع المكون من n ضلع $= (n-2)180^\circ$.



شكل 4-12

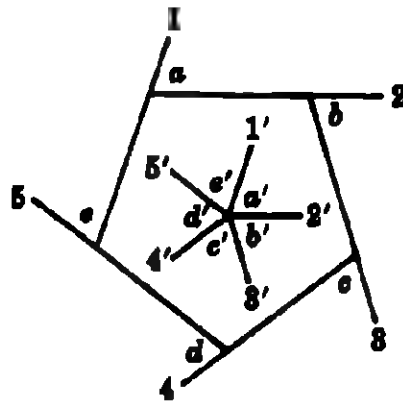
مجموع قياس الزوايا الخارجة للمضلع

Sum of the Measures of the Exterior Angles of a Polygon

الزوايا الخارجة للمضلع يمكن إعادة إنتاجها بحيث يكون لها نفس الرأس. لعمل هذا، ارسم خطوط متوازية لأضلاع المضلع من نقطة ما، كما فى الشكل 4-13. إذا تم عمل ذلك، يمكن رؤية أنه بغض النظر عن عدد الأضلاع، مجموع قياس الزوايا الخارجة يساوى 360° .

ملاحظة:

مجموع قياس الزوايا الخارجة للمضلع المكون من n ضلع $= 360^\circ$.



شكل 4-13

Polygon-Angle Principles

قواعد زوايا - المضلع

لأى مضلع

قاعدة 1: إذا كانت S مجموع قياس الزوايا الداخلة لمضلع مكون من n ضلع، إذن

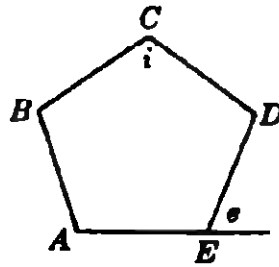
$$S = (n - 2) 180^\circ = \text{زاوية مستقيمة } n - 2$$

قاعدة 2: مجموع قياس الزوايا الخارجة لأى مضلع تساوى 360° .

للمضلع المنتظم

قاعدة 3: إذا كان للمضلع المنتظم المكون من n ضلع (شكل 4-14) زاوية داخلية قياسها i وزاوية خارجة قياسها e (بالدرجات). إذن

$$i = \frac{180(n-2)}{n} \quad e = \frac{360}{n} \quad \text{and } i + e = 180$$



شكل 4-14

إذن، للمضلع المنتظم المكون من 20 ضلعاً

$$i = \frac{180(20-2)}{20} = 162$$

$$e = \frac{360}{20} = 18$$

$$i + e = 162 + 18 = 180$$



نظريتان جديدتان للتطابق

Two New Congruency Theorems

ثلاث وسائل لإثبات تطابق المثلثات تم تقديمهم هنا وهي:

$$1. \text{ s.a.s.} \cong \text{ s.a.s.}$$

$$2. \text{ a.s.a.} \cong \text{ a.s.a.}$$

$$3. \text{ s.s.s.} \cong \text{ s.s.s.}$$

وسيلتان إضافيتان لإثبات تطابق المثلثات هما:

$$4. \text{ s.a.a.} \cong \text{ s.a.a.}$$

$$5. \text{ hy. leg} \cong \text{ hy. leg}$$

قاعدتان جديدتان للتطابق Two New Congruency Principles

قاعدة 1: (s.a.a \cong s.a.a) إذا كانت زاويتان وضلع مقابل لإحدهما في مثلث مطابقين للأجزاء المناظرة لها في مثلث آخر. إذن، المثلثان متطابقان.

قاعدة 2: (hy. leg \cong hy. leg) إذا كان الوتر وساق في مثلث قائم مطابقان للأجزاء المناظرة لها في مثلث آخر قائم، إذن، المثلثان متطابقان.

مسألة محلولة 4-1. (a) أثبت أنه إذا كان قياس زاوية في مثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الأخرين، يكون المثلث قائم الزاوية. (b) أثبت أنه إذا كانت الزوايا المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة، تكون الأضلاع المتقابلة متوازية.

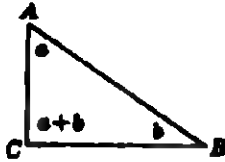
Solved Problem 4-1. (a) Prove that if the measure of one angle of a triangle equals the sum of the measures of the other two, then the triangle is a right triangle. (b) Prove that if the opposite angles of a quadrilateral are congruent, then its opposite sides are parallel.

الحل

(a) المعطيات: $\triangle ABC$, $m\angle C = m\angle A + m\angle B$

إثبات أن: $\triangle ABC$ مثلث قائم.

الخطوة: إثبات أن $m\angle C = 90^\circ$.



الإثبات الجبري

نفرض a = عدد الدرجات في $\angle A$.

b = عدد الدرجات في $\angle B$.

إذن $a + b$ = عدد الدرجات في $\angle C$.

$$a + b + (a + b) = 180 \quad (\text{Pr. 1})$$

$$2a + 2b = 180$$

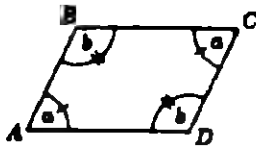
$$a + b = 90$$

بما أن $m\angle C = 90^\circ$ في $\triangle ABC$ هو مثلث قائم.

(b) المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$.

$$\angle B \cong \angle D, \angle A \cong \angle C$$

إثبات أن: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



الخطوة: إثبات أن الزوايا الداخلة $\angle a$ على نفس الجانب من الخط المستعرض متكاملة.

الإثبات الجبري

نفرض a = عدد الدرجات في $\angle A$ و $\angle C$.

b = عدد الدرجات في $\angle B$ و $\angle D$.

$$2a + 2b = 360 \quad (\text{Pr. 3})$$

$$a + b = 180$$

بما أن $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتان،

$$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

بما أن $\angle A$ و $\angle D$ متكاملتان،

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

الفصل الخامس

أشباه المنحرف ومتوازيات الأضلاع

Trapezoids and Parallelograms

فى هذا الفصل:

✓ أشباه المنحرف

✓ متوازيات الأضلاع

✓ متوازيات أضلاع خاصة

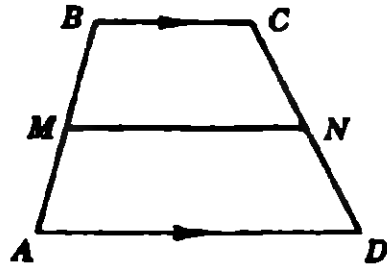
المستطيل، المعين، المربع

Trapezoids

أشباه المنحرف

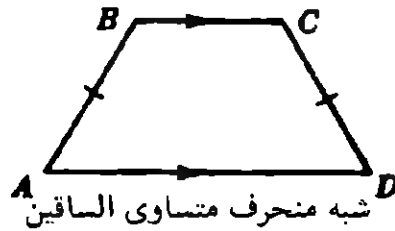
شبه المنحرف هو شكل رباعى به ضلعان فقط متوازيان. قاعدتى شبه المنحرف هما الضلعان المتوازيان وساقيه هما الضلعان غير المتوازيين. المستقيم المتوسط Median (القاعدة المتوسطة) لشبه المنحرف هو القطع الواصل بين نقطتى تنصيف الساقين.

إذن، فى شبه المنحرف $ABCD$ فى الشكل 5-1، القاعدتان هما \overline{AD} و \overline{BC} والساقان هما \overline{AB} و \overline{CD} . إذا كان M و N هما نقطتا التنصيف. إذن \overline{MN} هو المستقيم المتوسط لشبه المنحرف (القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف).



شكل 5-1

شبه المنحرف المتساوي الساقين Isosceles Trapezoid هو شبه منحرف ساقيه متطابقتين. إذن، في شبه المنحرف المتساوي الساقين $ABCD$ في الشكل 5-2، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. زوايا القاعدة لشبه المنحرف هي الزوايا التي تقع على نهايات القاعدة الأطول: $\angle A$ ، $\angle D$ هما زاويتا القاعدة لشبه المنحرف المتساوي الساقين $ABCD$.

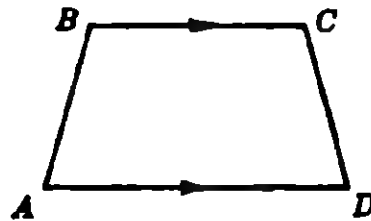


شكل 5-2

Trapezoid Principles

قواعد شبه المنحرف

قاعدة 1: زوايا القاعدة لشبه المنحرف المتساوي الساقين متطابقة. وبالتالي، في شبه المنحرف $ABCD$ في الشكل 5-3، إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، إذن $\angle A \cong \angle B$.



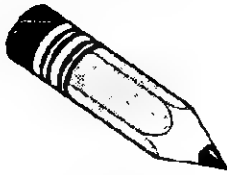
شكل 5-3

قاعدة 2: إذا كانت زاويتا القاعدة لشبه المنحرف متطابقتين، يكون شبه المنحرف متساوي الساقين.

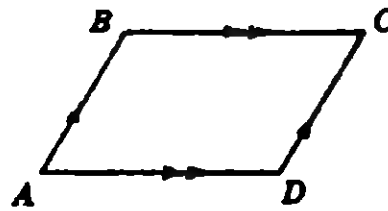
وبالتالي، في الشكل 5-3، إذا كان $\angle A \cong \angle D$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Parallelograms

متوازيات الأضلاع



متوازي الأضلاع هو شكل رباعي أضلاعه المتقابلة متوازية. رمز متوازي الأضلاع \square . إذن في $\square ABCD$ في الشكل 5-4، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعي متوازية، إذن الشكل هو متوازي أضلاع. إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، إذن $ABCD$ هو \square .



شكل 5-4

قواعد تشتمل على خصائص متوازيات الأضلاع

Principles Involving Properties of Parallelograms

- قاعدة 1: الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية.
- قاعدة 2: الخط القطري لمتوازيات الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.
- قاعدة 3: الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة.
- قاعدة 4: الزوايا المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة.
- قاعدة 5: الزوايا المتتالية لمتوازي الأضلاع متطابقة.
- قاعدة 6: الخطوط القطرية لمتوازي الأضلاع تنصف بعضها البعض.

إثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع

Proving a Quadrilateral is a Parallelogram

قاعدة 7: الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.

قاعدة 8: الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متطابقة.

قاعدة 9: الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت به ضلعان متطابقان ومتوازيان.

قاعدة 10: الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت زواياه المتقابلة متطابقة.

قاعدة 11: الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت خطوطه القطرية تنصف بعضها البعض.

متوازيات أضلاع خاصة: Special Parallelograms:

المستطيل، المعين، المربع Rectangle, Rhombus, Square

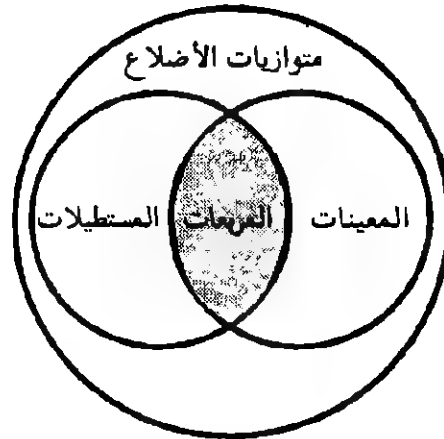
تعريفات وعلاقات متوازيات الأضلاع الخاصة

Definitions and Relationships among the Special Parallelograms

المستطيلات، المعينات، والمربعات تنتمي لمجموعة متوازيات الأضلاع. كل منها يمكن تعريفه كمتوازي أضلاع كالتالي:

1. المستطيل Rectangle متوازي أضلاع متساوي الزوايا.
 2. المعين Rhombus متوازي أضلاع متساوي الأضلاع.
 3. المربع Square متوازي أضلاع متساوي الأضلاع والزوايا.
- إذن المربع هو مستطيل ومعين.

العلاقات بين متوازيات الأضلاع الخاصة يمكن توضيحها عن طريق رسم دائرة تمثل كل مجموعة (الشكل 5-5).



شكل 5-5

1. بما أن كل مستطيل وكل معين يجب أن يكون متوازي أضلاع، فإن الدائرة لمجموعة المستطيلات والدائرة لمجموعة المعينات يجب أن تقع داخل دائرة مجموعة متوازيات الأضلاع.
2. بما أن كل مربع هو مستطيل ومعين، المقطع المتداخل والمطلل يجب أن يمثل مجموعة المربعات.

قواعد تشتمل على خصائص متوازيات الأضلاع الخاصة

Principles Involving Properties of the Special Parallelograms

- قاعدة 1: المستطيل، المعين أو المربع له نفس خصائص متوازي الأضلاع.
- قاعدة 2: كل زاوية في المستطيل زاوية قائمة.
- قاعدة 3: الخطوط القطرية للمستطيل متطابقة.
- قاعدة 4: كل أضلاع المعين متطابقة.
- قاعدة 5: الخطوط القطرية للمعين منصفات متعامدة لبعضها البعض.
- قاعدة 6: الخطوط القطرية للمعين تنصف زوايا الرأس .

قاعدة 7: الخطوط القطرية للمعين تُكوّن أربعة مثلثات متطابقة.

قاعدة 8: المربع له نفس خصائص المعين والمستطيل.

خصائص الخطوط القطرية لمتوازيات الأضلاع، المستطيلات، المعينات، المربعات

Diagonal Properties of Parallelograms, Rectangles, Rhombuses, and Squares

كل علامة في الجدول التالي تدل على خاصية للخط القطري بالنسبة للشكل.

المربع	المعين	المستطيل	متوازي الأضلاع	خصائص الخط القطري
✓	✓	✓	✓	الخطوط القطرية تنصف بعضها البعض.
✓		✓		الخطوط القطرية متطابقة.
✓	✓			الخطوط القطرية متعامدة.
✓	✓			الخطوط القطرية تنصف زوايا الرأس.
✓	✓	✓	✓	الخطوط القطرية تُكوّن زوجين من المثلثات المتطابقة.
✓	✓			الخطوط القطرية تُكوّن 4 مثلثات متطابقة.

إثبات أن متوازي الأضلاع هو مستطيل، معين، أو مربع

Proving that a Parallelogram is a Rectangle, Rhombus, or a Square

إثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل

Proving that a Parallelogram is a Rectangle



التعريف الأساسي أو الأدنى للمستطيل هو: المستطيل هو متوازي أضلاع به زاوية قائمة واحدة. بما أن الزوايا المتتالية لمتوازي الأضلاع متكاملة، إذا كانت زاوية واحدة قائمة، فإن الزوايا المتبقية يجب أن تكون قائمة.

ومقلوب هذا التعريف الأساسى ينتج عنه وسيلة مفيدة لإثبات أن متوازى الأضلاع مستطيل كالتالى:

قاعدة 9: إذا كان متوازى الأضلاع به زاوية قائمة واحدة، إذن هو مستطيل.

قاعدة 10: إذا كان متوازى الأضلاع به خطوط قطرية متطابقة، إذن هو مستطيل.

إثبات أن متوازى الأضلاع معين

Proving that a Parallelogram is a Rhombus

التعريف الأساسى أو الأدنى للمعين هو: المعين هو متوازى أضلاع به أضلاع متجاورة متطابقة.

ومقلوب هذا التعريف ينتج عنه وسيلة مفيدة لإثبات أن متوازى الأضلاع معين كالتالى:

قاعدة 11: إذا كان متوازى الأضلاع به أضلاع متجاورة متطابقة، إذن هو معين.

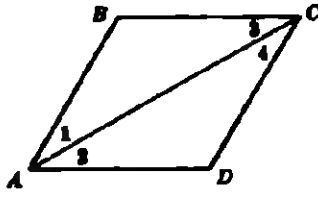
Proving that a Parallelogram is a Square إثبات أن متوازى الأضلاع مربع

قاعدة 12: إذا كان متوازى الأضلاع به زاوية قائمة وضلعان متجاوران متطابقان، إذن هو مربع وهذا ينتج من حقيقة أن المربع هو مستطيل ومعين.

مسألة محلولة 5-1. أثبت أن الخط القطرى للمعين ينصف كل زاوية رأس يمر بها.

Solved Problem 5-1. Prove that a diagonal of a rhombus bisects each vertex angle through which it passes.

الحل



المعطيات: المعين $ABCD$

\overline{AC} خط قطري.

إثبات أن: \overline{AC} ينصف $\angle A$ و $\angle C$.

الخطوة: إثبات (1) $\angle 2$ و $\angle 1$ مطابقتان للزاوية $\angle 3$.

(2) $\angle 3$ و $\angle 4$ مطابقتان للزاوية $\angle 1$.

البرهان:

الأسباب	التعابير
1. معطى.	1. $ABCD$ معين
2. المعين متساوى الأضلاع.	2. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
3. في Δ ، الزوايا المقابلة لأضلاع متطابقة تكون متطابقة.	3. $\angle 1 \cong \angle 3$
4. الأضلاع المتقابلة في \square تكون \parallel .	4. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
5. الزوايا الداخلية المتبادلة \angle للخطوط \parallel تكون متطابقة.	5. $\angle 2 \cong \angle 3$, $\angle 1 \cong \angle 4$
6. الأشياء المطابقة لنفس الشيء تكون مطابقة لبعضها البعض.	6. $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$
7. التقسيم إلى جزئين متطابقين هو التنصيف.	7. \overline{AC} ينصف $\angle A$, $\angle C$

الفصل السادس

الدوائر

Circles

فى هذا الفصل:

✓ علاقات الدائرة

✓ المماسات

✓ قياس الزوايا والأقواس فى الدائرة

Circle Relationships

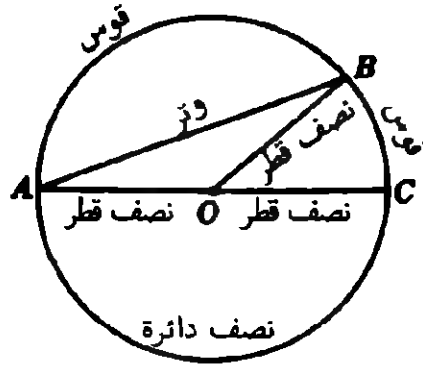
علاقات الدائرة

المصطلحات التالية مرتبطة بالدائرة وعلى الرغم من أن بعضها تم تعريفه من قبل، سيتم إعادتهم هنا كمرجع.

الدائرة Circle هى مجموعة نقاط فى المستوى تبعد بعداً ثابتاً عن مركز الدائرة Center.

محيط الدائرة Circumference هو المسافة حول الدائرة ويحتوى على 360° .

نصف قطر الدائرة Radius هو قطعة مستقيمة تصل مركز الدائرة بأى نقطة على الدائرة (انظر شكل 6-1).



شكل 6-1

من تعريف الدائرة ينتج أن أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.
الوتر Chord هو القطع المستقيم الذى يصل بين أى نقطتين على الدائرة.

القطر Diameter هو الوتر المار بمركز الدائرة؛ وهو أطول الأوتار وطوله ضعف طول نصف القطر.

زاوية المركز Central Angle هي زاوية تتكون من نصفى قطر الدائرة.

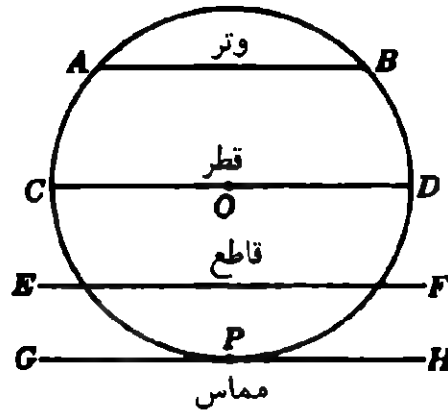


القوس Arc هو جزء متصل من الدائرة. نصف الدائرة Semicircle هي قوس مقياسه نصف محيط الدائرة وبالتالي يحتوى على 180° .

القوس الثانوى Minor arc هو قوس أقل من نصف الدائرة. القوس الرئيسى Major Arc هو قوس أكبر من نصف الدائرة. إذن، فى الشكل 6-1، \widehat{BC} هو قوس ثانوى و \widehat{BAC} هو قوس رئيسى.

حصر Intercept القوس هو قطع هذا القوس. إذن، فى الشكل 6-1، $\angle BAC$ و $\angle BOC$ تحصران القوس \widehat{BC} .

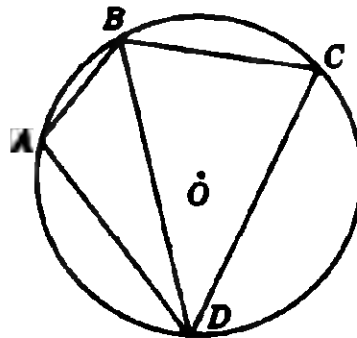
الوتر هو قطع مستقيم يصل بين نقطتين على المحيط. إذن، فى الشكل 6-2، \overline{AB} وتر.



شكل 6-2

قطر الدائرة هو وتر يمر خلال مركز الدائرة. قاطع الدائرة Secant هو خط يتقاطع مع الدائرة في نقطتين، المماس Tangent هو خط يمس الدائرة في نقطة واحدة فقط بغض النظر عن بُعد هذه النقطة. إذن، في الشكل 6-2، \overline{CD} هو قطر الدائرة O ، \overleftrightarrow{EF} هو قاطع الدائرة، \overleftrightarrow{GH} هو المماس للدائرة في النقطة P . P هي نقطة الالتقاء أو نقطة التماس.

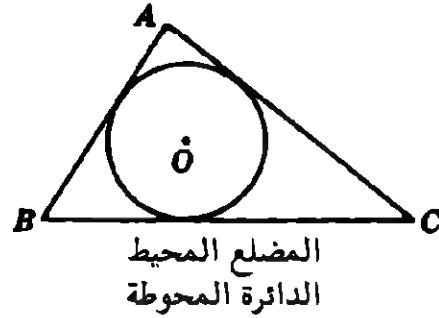
المضلع المحوط Inscribed Polygon هو مضلع كل أضلاعه أوتار في الدائرة. الدائرة المحيطة Circumscribed هي دائرة تمر بكل رأس في المضلع. إذن، $\triangle ABD$ ، والشكل الرباعي $ABCD$ هي مضلعات محوطة للدائرة O في الشكل 6-3. الدائرة O هي دائرة محيطة للشكل الرباعي $ABCD$.



المضلع المحوط
الدائرة المحيطة

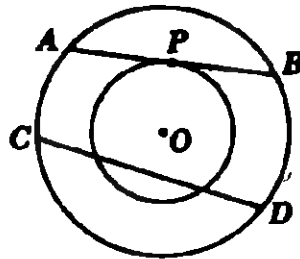
شكل 6-3

المضلع المحيط Circumscribed Polygon هو مضلع كل أضلاعه مماسات للدائرة. الدائرة المحوطة هي دائرة بحيث كل أضلاع المضلع مماسات لها. إذن، $\triangle ABC$ هو مضلع محيط للدائرة O في الشكل 6-4. الدائرة O هي دائرة محوطة بـ $\triangle ABC$.



شكل 6-4

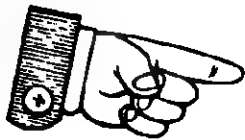
الدوائر متحدة المركز هي دوائر لها نفس المركز. إذن، الدائرتان الموضوعتان في الشكل 6-5 هما دائرتان متحدتا المركز. \overline{AB} هو مماس للدائرة الخارجية. \overline{CD} هو قاطع للدائرة الداخلية ووتر للدائرة الخارجية.



الدوائر متحدثتا المركز

شكل 6-5

الدائرتان تكونان متساويتان إذا كانت أطوال أنصاف أقطارهما متساوية؛ الدائرتان متطابقتان إذا كانت أنصاف أقطارهما متطابقة.



القوسان يكونان متطابقين إذا كان لهما قياس درجات وأطوال متساوية. ونستخدم الرمز $m \widehat{AC}$ للاستدلال على "قياس القوس AC".

Circle Principles

قواعد الدائرة

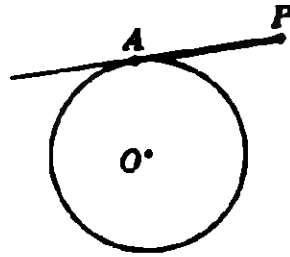
- قاعدة 1: القطر يقسم الدائرة إلى جزئين متساويين.
- قاعدة 2: إذا قسم الوتر الدائرة إلى جزئين متساويين، إذن هو قطر للدائرة (هذه القاعدة مقلوب القاعدة 1).
- قاعدة 3: النقطة تقع خارج الدائرة، على الدائرة أو داخل الدائرة طبقاً للمسافة بينها وبين المركز إذا كانت أكبر من أو تساوى أو أصغر من طول نصف القطر.
- قاعدة 4: أنصاف أقطار نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة تكون متطابقة.
- قاعدة 5: أقطار نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة تكون متطابقة.
- قاعدة 6: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، زوايا المركز المتطابقة لها أقواس متطابقة.
- قاعدة 7: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأقواس المتطابقة لها زوايا مركز متطابقة.
- قاعدة 8: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأوتار المتطابقة لها أقواس متطابقة.
- قاعدة 9: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأقواس المتطابقة لها أوتار متطابقة. (القاعدة 8 والقاعدة 9 هما مقلوبا بعضهما البعض).
- قاعدة 10: القطر العمودى على وتر ينصف الوتر وأقواسه.
- قاعدة 11: العمود المنصف لوتر يمر خلال مركز الدائرة.
- قاعدة 12: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأوتار المتطابقة تقع على بُعدٍ متساوٍ من المركز.

قاعدة 13: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأوتار التى تقع على بُعد متساوٍ من المراكز تكون متطابقة. (القاعدة 12 والقاعدة 13 هما مقلوبا بعضهما البعض).

Tangents

المماسات

طول المماس من نقطة إلى الدائرة هو طول قطع التماس من النقطة المعلومه إلى نقطة التماس. إذن، PA هو طول المماس من النقطة P إلى الدائرة O فى الشكل 6-6.



شكل 6-6

Tangent Principles

قواعد المماس

قاعدة 1: المماس عمودى على نصف القطر المرسوم من نقطة التلاقي (التماس).

قاعدة 2: يكون الخط مماساً للدائرة إذا كان عمودياً على نصف القطر عند نهايته الخارجية.

قاعدة 3: الخط يمر بمركز الدائرة إذا كان عمودياً على المماس عند نقطة التماس.

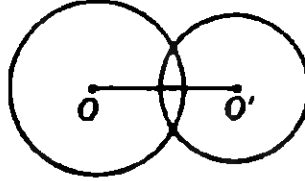
قاعدة 4: المماسات للدائرة من نقطة خارجية متطابقة.

قاعدة 5: القطع المار من مركز الدائرة إلى نقطة خارجية ينصف الزاوية بين المماسات من النقطة إلى الدائرة.

دائرتان فى أوضاع نسبية مختلفة

Two Circles in Varying Relative Positions

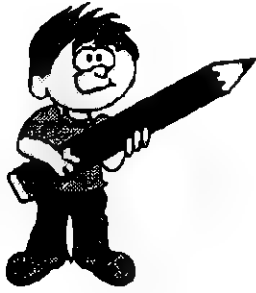
خط المركزين للدائرتين هو الخط الذى يصل بين مركزى الدائرتين.
إذن، $\overline{OO'}$ هو خط المركزين للدائرتين O و O' فى الشكل 6-7.



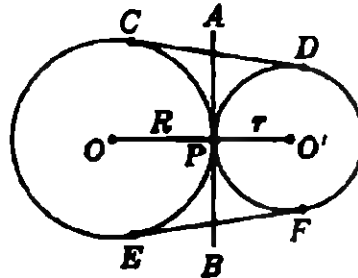
شكل 6-7

Circles Tangent Externally

دائرتان متماستان من الخارج



الدائرتان O و O' فى شكل 6-8 متماستان من الخارج عند النقطة P . \overrightarrow{AB} هو المماس الداخلى المشترك لكلا الدائرتين. خط المركزين $\overline{OO'}$ يمر بالنقطة P وعمودى على \overrightarrow{AB} وطوله يساوى مجموع أنصاف الأقطار $R + r$. كذلك، \overrightarrow{AB} ينصف كل من المماسات الخارجية المشتركة \overline{CD} و \overline{EF} .

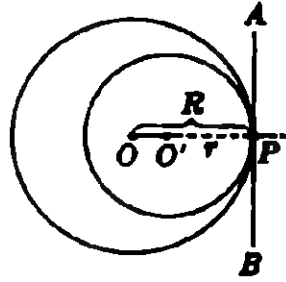


شكل 6-8

Circles Tangent Internally

دائرتان متماستان من الداخل

الدائرتان O و O' في الشكل 6-9 متماستان من الداخل عند النقطة P . \overrightarrow{AB} هو المماس الخارجي المشترك لكلا الدائرتين. خط المركزين $\overline{OO'}$ إذا تم امتداده يمر بالنقطة P ويكون عمودياً على \overrightarrow{AB} وطوله يساوي فرق أنصاف الأقطار $R - r$.

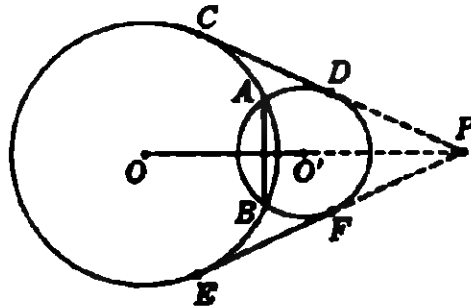


شكل 6-9

Overlapping Circles

دائرتان متداخلتان

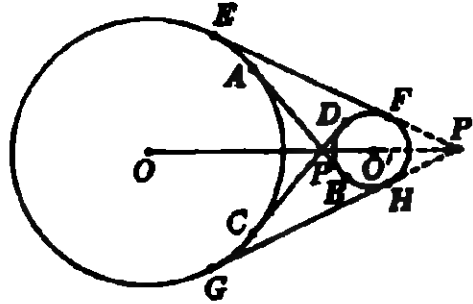
الدائرتان O و O' في الشكل 6-10 متداخلتان. الوتر المشترك هو \overline{AB} . إذا كانت الدائرتان غير متساويتين، المماسان الخارجيان المشتركان \overrightarrow{CD} و \overrightarrow{EF} يتلاقيان عند P . خط المركزين $\overline{OO'}$ هو العمود المنصف للوتر \overline{AB} وإذا تم امتداده يمر خلال النقطة P .



شكل 6-10

الدوائر المتباعدة (خارج بعضها البعض) Circles Outside Each Other

الدائرتان O و O' في الشكل 6-11 يقعان كلياً خارج بعضهما البعض. المماسان الداخليان المشتركان \overline{AB} و \overline{CD} يتلاقيان عند P . إذا كانت الدائرتان غير متساويتين، المماسان الخارجيان المشتركان \overline{EF} و \overline{GH} ، إذا تم امتدادهما يتلاقيان عند P' . خط المركزين $\overline{OO'}$ يمر خلال P و P' . كذلك، $\overline{AB} = \overline{CD}$ و $\overline{EF} = \overline{GH}$.

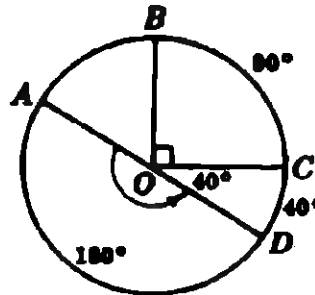


شكل 6-11

قياس الزوايا والاقواس في الدائرة

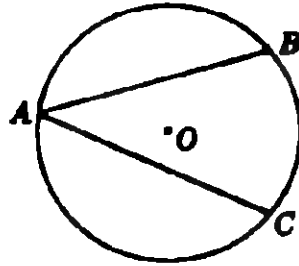
Measurements of Angles and Arcs in a Circle

زاوية المركز Central Angle لها نفس عدد الدرجات مثل القوس الذي تنحصر بداخله. إذن، في الشكل 6-12، زاوية المركز القائمة تنحصر داخل قوس 90° ، زاوية المركز التي قياسها 40° تنحصر داخل قوس 40° ، و زاوية المركز التي تمثل زاوية مستقيمة تنحصر داخل نصف دائرة قياسها 180° .



شكل 6-12

الزاوية المحوطة Inscribed Angle هي الزاوية التي رأسها تقع على الدائرة وأضلاعها أوتار في الدائرة. الزاوية المحوطة في قوس رأسها تقع على القوس وأضلاعها تمر خلال نهايات القوس. إذن $\angle A$ تحصر \widehat{BC} ومحوطة في \widehat{BAC} .



شكل 6-13

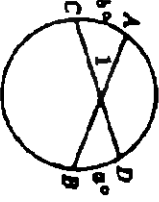
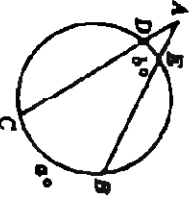
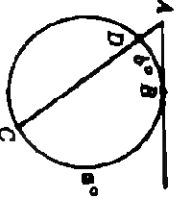
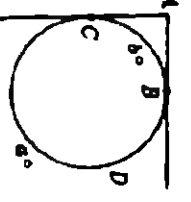
- قاعدة 1: الزاوية المركزية تقاس بقوسها المنحصر.
- قاعدة 2: الزاوية المحوطة تقاس بنصف قوسها المنحصر.
- قاعدة 3: في نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الزوايا المحوطة المتطابقة لها أقواس منحصرة متطابقة.
- قاعدة 4: في نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الزوايا المحوطة التي لها أقواس منحصرة متطابقة تكون متطابقة.
- قاعدة 5: الزوايا المحوطة في نفس القوس أو الأقواس المتطابقة تكون متطابقة.
- قاعدة 6: الزاوية المحوطة في نصف دائرة هي زاوية قائمة.
- قاعدة 7: الزوايا المتقابلة في الشكل الرباعي المحوطة هي زوايا متكاملة.

- قاعدة 8: الخطوط المتوازية تحصر أقواساً متطابقة على الدائرة.
- قاعدة 9: الزاوية المتكونة من مماس ووتر تقاس بنصف القوس المنحصر.
- قاعدة 10: الزاوية المتكونة من وترين متقاطعين تقاس بنصف مجموع الأقواس المنحصرة.
- قاعدة 11: الزاوية المتكونة من قاطعين متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين الأقواس المنحصرة.
- قاعدة 12: الزاوية المتكونة من مماس وقاطع متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين الأقواس المنحصرة.
- قاعدة 13: الزاوية المتكونة من مماسين متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين الأقواس المنحصرة.

جدول قواعد قياس الزاوية

Table of Angle-Measurement Principles

وسيلة القياس	صيغة القياس	الشكل	نوع الزاوية	موضع الرأس
عن طريق القوس المنحصر	$\angle O \cong \angle B$ $m\angle O = a^\circ$		زاوية المركز (تطبيق القاعدة 1)	مركز الدائرة
عن طريق نصف القوس المنحصر	$\angle A \cong \frac{1}{2}\widehat{BC}$ $m\angle A = \frac{1}{2}a^\circ$		زاوية محوطة (تطبيق القاعدة 2)	على الدائرة
			زاوية متكونة من مماس ووتر	
			(تطبيق القاعدة 9)	

داخل الدائرة	زاوية متكونة من وترين مقاطعين (تطبيق القاعدة 10)		$\angle 1 \cong \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$ $m\angle 1 = \frac{1}{2}(a^\circ + b^\circ)$	عن طريق نصف مجموع الأقواس المنحصرة
خارج الدائرة	زاوية متكون من قاطعين (تطبيق القاعدة 11)		$\angle A \cong \frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{DE})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ - b^\circ)$	عن طريق نصف فرق الأقواس المنحصرة
	زاوية متكونة من قاطع ومماس (تطبيق القاعدة 12)		$\angle A \cong \frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{BD})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ - b^\circ)$	
	زاوية متكونة من مماسين (تطبيق القاعدة 13)		$\angle A \cong \frac{1}{2}(\widehat{BDC} - \widehat{BC})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ - b^\circ)$ Also, $m\angle A = (180 - b)^\circ$	

مسألة محلولة 6-1. أثبت أن الأوتار المتوازية المرسومة من نهايتي القطر متساوية في الطول.

Solved Problem 6-1. Prove that parallel chords drawn at the ends of a diameter are equal in length.

الحل

المعطيات: الدائرة O

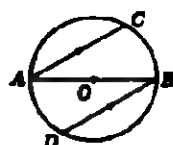
القطر \overline{AB}

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

إثبات أن: $AC = BD$

الخطوة: إثبات أن $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

البرهان:



التعابير	الأسباب
1. \overline{AB} قطر	1. معطى.
2. $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$	2. القطر يقطع الدائرة إلى نصفين دائريين متساويين.
3. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$	3. معطى.
4. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	4. الخطوط المتوازية تحصر أقواساً \cong على الدائرة.
5. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	5. إذا طرحنا متساويات من متساويات، الفروق تكون متساوية. تعريف الأقواس \cong .
6. $AC = BD$	6. في الدوائر، الأقواس المتساوية لها أوتار متساوية في الطول.

الفصل السابع التماثل Similarity

فى هذا الفصل:

- ✓ النسب
- ✓ التناسب
- ✓ القطع المتناسبة
- ✓ المثلثات المتماثلة
- ✓ المتناسب الوسط فى المثلث القائم
- ✓ نظرية فيثاغورس
- ✓ مثلثات قائمة خاصة

Ratios

النسب

النسب تستخدم لمقارنة الكميات عن طريق القسمة: النسبة بين كميتين هي الأولى مقسومة على الثانية. النسبة هي عدد مجرد بمعنى أنها رقم بدون وحدة قياس إذن، نسبة 10 ft إلى 5 ft هي $10 \text{ ft} \div 5 \text{ ft}$ التى تساوى 2.
النسب يمكن التعبير عنها بالطرق التالية:
1. باستخدام علامة الترقيم، كما فى 3:4.

2. باستخدام إلى (to) كما في 3 إلى 4 (3 to 4).

3. ككسر اعتيادي، كما في $\frac{3}{4}$.

4. كرقم عشري، 0.75.

5. كنسبة مئوية، 75%.

الكميات المشتملة عليها النسبة يجب أن يكون لها نفس الوحدة. النسبة يجب تبسيطها عن طريق اختزالها إلى أقل حد وحذف الكسور. إذن، لإيجاد النسبة 1 ft إلى 4 in. أولاً نغير القدم (foot) إلى 12 بوصة (inches)، ثم نأخذ نسبة 12 inches إلى 4 inches؛ النتيجة هي النسبة 3 إلى 1 (3 to 1) أو 3. أيضاً نسبة $2\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ يجب إعادة صياغتها إلى 5:1 أو 5. النسبة بين ثلاث كميات أو أكثر يمكن التعبير عنها بالنسبة المتصلة Continued Ratio. إذن، النسبة \$2 إلى \$3 إلى \$5 (2\$ to 3\$ to 5\$) هي النسبة المتصلة 2:3:5. هذه النسبة المطلقة مركبة من ثلاث نسب منفصلة هي 2:3، 3:5، و 2:5.

Proportions

التناسب

التناسب هو تساوي نسبتين. إذن $2:5 = 4:10$ (أو $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$) تعتبر تناسب.



الحد الرابع للتناسب هو التناسب الرابع للثلاثة الآخرين مأخوذين بترتيبهم. إذن، في $2:3 = 4:x$ ، x هي التناسب الرابع للأعداد 2، 3، و 4.

أوساط Means التناسب هي الحدود الوسطى بمعنى، الحد الثاني والثالث. أطراف Extremes التناسب هي الحدود الخارجية بمعنى، الحد الأول والرابع. إذن، في $a:b = c:d$ ، الأوساط هي c و b والأطراف هي a و d .

Proportion Principles

قواعد التناسب

قاعدة 1: فى أى تناسب، حاصل ضرب الأوساط يساوى حاصل ضرب الأطراف.

قاعدة 2: إذا كان حاصل ضرب رقمين يساوى حاصل ضرب رقمين آخرين، أى زوج يمكن اعتباره أوساط التناسب والزوج الآخر أطراف التناسب.

وسائل تغيير التناسب إلى التناسب المساوى

Methods of Changing a Proportion Into an Equivalent Proportion

قاعدة 3: (وسيلة الإقلاب) التناسب يمكن تغييره إلى التناسب المساوى عن طريق قلب كل نسبة.

قاعدة 4: (وسيلة التناوب) التناسب يمكن تغييره إلى تناسب مساوٍ عن طريق تبديل الأوساط أو تبديل الأطراف.

قاعدة 5: (وسيلة الجمع) التناسب يمكن تغييره إلى تناسب مساوٍ عن طريق جمع الحدود فى كل نسبة للحصول على حد أول وثالث جديدين.

قاعدة 6: (وسيلة الطرح) التناسب يمكن تغييره إلى تناسب مساوٍ عن طريق طرح الحدود فى كل نسبة للحصول على حد أول وثالث جديدين.

Other Proportion Principles

قواعد تناسب أخرى

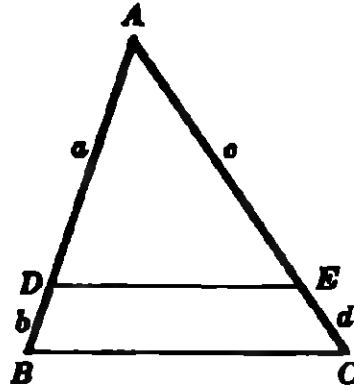
قاعدة 7: إذا تساوت ثلاثة حدود فى تناسب مع الحدود المناظرة لها فى تناسب آخر، باقى الحدود تكون متساوية.

قاعدة 8: فى متتالية النسب المتساوية، مجموع أى بسط إلى مجموع المقام المناظر مثل أى بسط إلى مقامه.

Proportional Segments

القطع المتناسبة

إذا تم تقسيم قطعين بالتناسب (1) القطع الجديدة المتناظرة تكون متناسبة، و(2) القطعين الأصليين وأى زوج من القطعين الجديدين المتناظرين يكونوا متناسبين. إذن، إذا كان \overline{AC} و \overline{CD} فى الشكل 7-1 مقسومين بالتناسب بالقطعة \overline{DE} ، يمكن كتابة تناسب مثل $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باستخدام الأربعة قطع، أو يمكن كتابة تناسب مثل $\frac{a}{AB} = \frac{c}{AC}$ باستخدام القطعين الأصليين واثنان من قطعهم الجديدة.

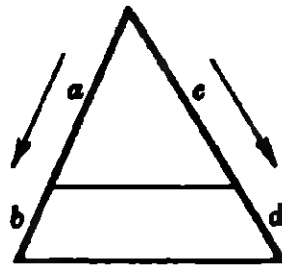


شكل 7-1

إيجاد الثمان منظومات لأى تناسب

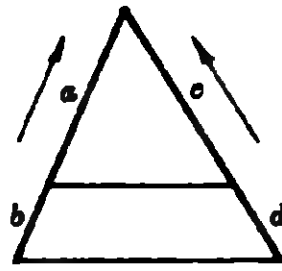
Obtaining the Eight Arrangements of any Proportion

تناسب مثل $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ يمكن تنظيمه بثمان طرق. لإيجاد الثمان اختلافات فإننا نجعل كل حد من حدود التناسب يمثل واحد من القطع الجديدة فى الشكل 7-1. اثنان من التناسبات الممكنة تم إيجادها من كل اتجاه، كما هو تالٍ.



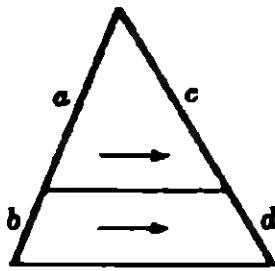
الاتجاه: أسفل

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ or } \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$



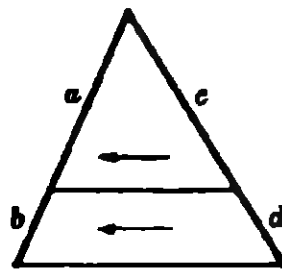
الاتجاه: أعلى

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ or } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$



الاتجاه: يمين

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ or } \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$



الاتجاه: يسار

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \text{ or } \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

Principles of Proportional Segments قواعد تناسب القطع

قاعدة 1: إذا كان الخط موازي لأحد أضلاع المثلث. إذن، فهو يقسم الضلعين الآخرين بالتناسب.

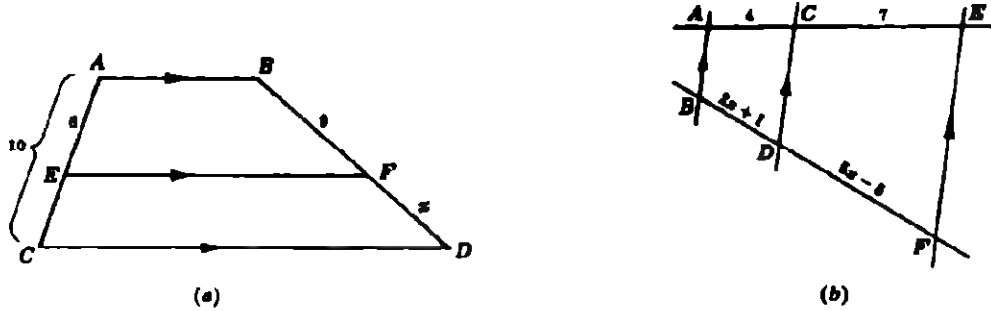
قاعدة 2: إذا كان الخط يقسم ضلعين من أضلاع المثلث بالتناسب، فهو موازي للضلع الثالث (القاعدة 1 والقاعدة 2 هما مقلوب بعضهما البعض).

قاعدة 3: ثلاثة خطوط متوازية أو أكثر يقطعوا أي خطين مستعرضين بالتناسب.

قاعدة 4: منصف زاوية المثلث يقسم الأضلاع المتقابلة إلى قطع تتناسب مع الأضلاع المتجاورة.

مسألة محلولة 7-1. أوجد x في كل جزء في الشكل 7-2.

Solved Problem 7-1. Find x in each part of Fig. 7-2.



شكل 7-2

(a) لدينا $EC = 4$ و $\overline{AB} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{CD}$ ؛ إذن $\frac{x}{9} = \frac{4}{6}$ و $x = 6$.

(b) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ؛ إذن $\frac{5x-5}{2x+1} = \frac{7}{4}$ ، ومنها $20x - 20 = 14x + 7$.

إذن $6x = 27$ و $x = 4\frac{1}{2}$.

Similar Triangles

المثلثات المتماثلة



المضلعات المتماثلة Similar Polygons هي مضلعات زواياها المتناظرة متطابقة وأضلاعها المتناظرة متناسبة. المضلعات المتماثلة لها نفس الشكل على الرغم من أنه ليس بالضرورة أن يكون لها نفس الحجم.

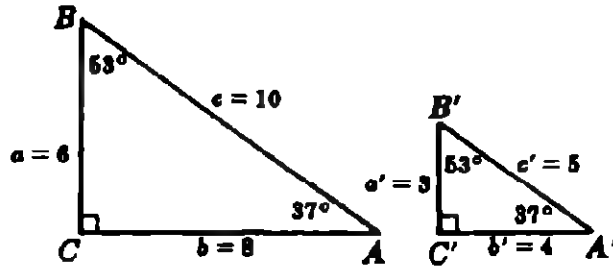
رمز "التماثل" هو \sim . كما في حالة المثلثات المتطابقة، الأضلاع

المتناظرة في المثلثات المتماثلة تقابل زوايا متطابقة.

في الشكل 7-3، $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ لأن

$$m\angle A = m\angle A' = 37^\circ \quad m\angle B = m\angle B' = 53^\circ \quad m\angle C = m\angle C' = 90^\circ$$

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} \quad \text{أو} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



شكل 7-3

Principles of Similar Triangles

قواعد المثلثات المتماثلة

قاعدة 1: الزوايا المتناظرة للمثلثات المتماثلة تكون متطابقة (من التعريف).

قاعدة 2: الأضلاع المتناظرة للمثلثات المتماثلة تكون متناسبة (من التعريف).

قاعدة 3: يكون المثلثان متماثلين إذا كانت زاويتان لمثلث تطابقان على التوالي زاويتين في المثل الآخر.

قاعدة 4: يكون المثلثان متماثلين إذا كانت زاوية في أحد المثلثين تطابق زاوية في المثلث الآخر والأضلاع التي تحوي هاتين الزاويتين في تناسب مع بعضها البعض.

قاعدة 5: يكون المثلثان متماثلين إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

قاعدة 6: يكون المثلثان القائمان متماثلين إذا كانت الزاوية الحادة لأحدهما مطابقة للزاوية الحادة في المثلث الآخر (نتيجة للقاعدة 3).

قاعدة 7: الخط الموازي لأحد أضلاع المثلث يقطع مثلث متماثل مع المثلث المعطى.

قاعدة 8: المثلثات المماثلة لنفس المثلث تكون مماثلة لبعضها البعض.

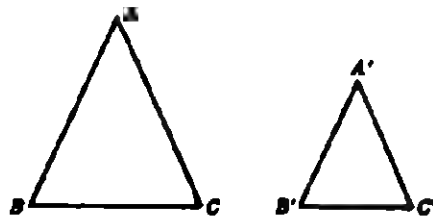
قاعدة 9: الارتفاع إلى وتر المثلث القائم يقسم المثلث القائم إلى مثلثين مماثلين للمثلث المعطى ولبعضهما البعض.

قاعدة 10: المثلثات تكون متماثلة إذا كانت أضلاعها على التوالي موازية لبعضها البعض.

قاعدة 11: المثلثات تكون متماثلة إذا كانت أضلاعها على التوالي متعامدة على بعضها البعض.

مسألة محلولة 7-2. أثبت أن مثلثين متساوي الساقين متماثلان إذا كانت زاوية القاعدة لأحدهما تطابق زاوية القاعدة للمثلث الآخر.

Solved Problem 7-2. Prove that two isosceles triangles are similar if a base angle of one is congruent to a base angle of the other.



المعطيات: المثلث المتساوي الساقين

$$\Delta ABC (AB = AC)$$

المثلث المتساوي الساقين

$$\Delta A'B'C' (A'B' = A'C')$$

$$\angle B \cong \angle B'$$

إثبات أن: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

الخطوة: إثبات أن $\angle C \cong \angle C'$ واستخدام القاعدة 3.

البرهان:

التعابير	الأسباب
1. $\angle B \cong \angle B'$	1. معطى.
2. $\angle B \cong \angle C, \angle B' \cong \angle C'$	2. زوايا القاعدة للمثلث المتساوي الساقين متطابقة.
3. $\angle C \cong \angle C'$	3. الأشياء \cong لأشياء تكون \cong لبعضها البعض.
4. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$	4. المثلثان يكونان متماثلين إذا كانت زاويتان لمثلث تطابقان زاويتين لمثلث آخر.

المتناسب الوسط في المثلث القائم

Mean Proportionals in a Right Triangle

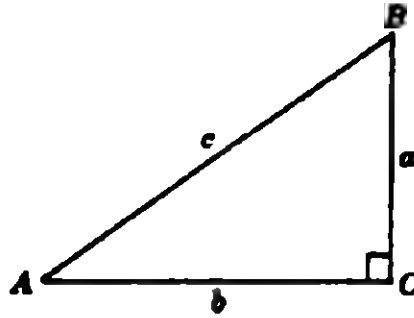
قاعدة 1: طول الارتفاع إلى الوتر للمثلث القائم هو المتناسب الوسط بين أطوال قطع الوتر.

قاعدة 2: في المثلث القائم، طول أى من الساقين هو المتناسب الوسط بين طول الوتر وطول إسقاط هذه الساق على الوتر.

Pythagorean Theorem

نظرية فيثاغورس

في المثلث القائم، مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعات أطوال ساقى المثلث. إذن، في الشكل 7-4، $c^2 = a^2 + b^2$.



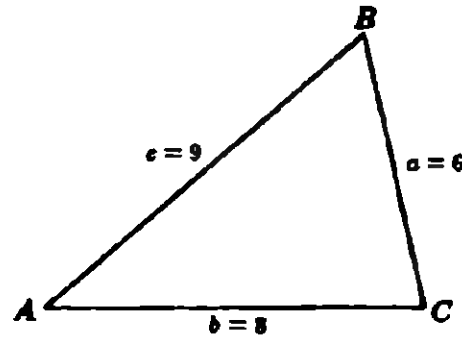
شكل 7-4

اختبارات للمثلثات القائمة، الحادة، والمنفرجة

Tests for Right, Acute, and Obtuse Triangles

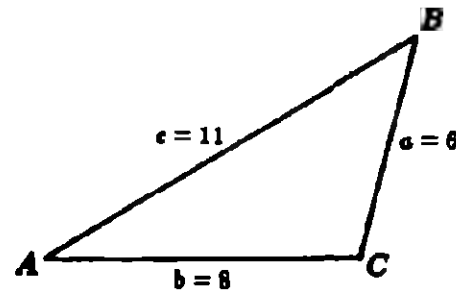
إذا كان $c^2 = a^2 + b^2$ تنطبق على الثلاثة أضلاع للمثلث، إذن، المثلث قائم، لكن إذا كانت $c^2 \neq a^2 + b^2$ ، إذن المثلث ليس قائم الزاوية.

في $\triangle ABC$ ، إذا كانت $c^2 < a^2 + b^2$ حيث c هو أطول ضلع في المثلث، إذن المثلث حاد. إذن، في الشكل 7-5، $9^2 < 6^2 + 8^2$ (بمعنى $81 < 100$). إذن، $\triangle ABC$ مثلث حاد.



شكل 7-5

في ΔABC ، إذا كانت $c^2 > a^2 + b^2$ حيث c هو أطول ضلع في المثلث، إذن المثلث منفرج. إذن، في الشكل 7-6، $11^2 > 6^2 + 8^2$ (بمعنى $121 > 100$)؛ إذن، ΔABC مثلث منفرج.



شكل 7-6

Special Right Triangles

مثلثات قائمة خاصة

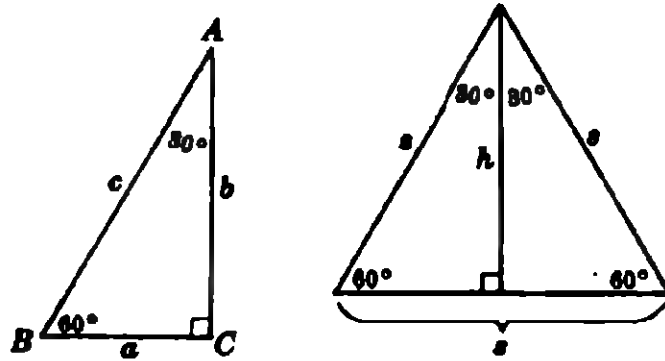
The 30°-60°-90° Triangle

المثلث 90°-60°-30°

المثلث 30°-60°-90° هو نصف مثلث متساوي الأضلاع. إذن، في المثلث القائم ABC (شكل 7-7) $a = \frac{1}{2}c$. افترض أن $c = 2$ ؛ إذن $a = 1$. ونظرية

فيثاغورس تعطي $b^2 = c^2 - a^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ أو $b = \sqrt{3}$.

وبالتالي نسبة الأضلاع تكون $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$.



شكل 7-7

قواعد المثلث $90^\circ-60^\circ-30^\circ$ Principles of the $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ Triangle

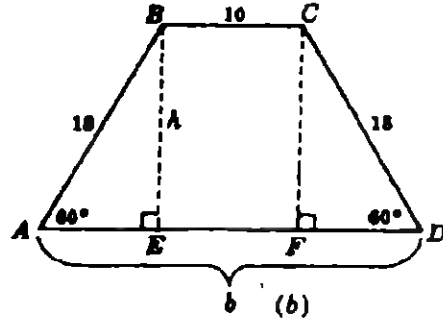
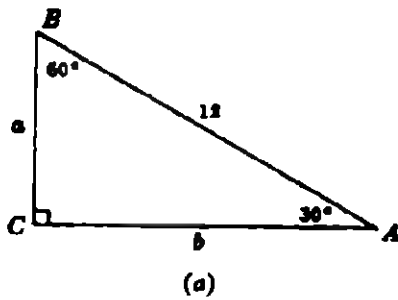
- قاعدة 1: طول الساق المقابلة للزاوية 30° يساوى نصف طول الوتر.
- قاعدة 2: طول الساق المقابلة للزاوية 60° يساوى نصف طول الوتر مضروباً فى الجذر التربيعى للرقم 3.
- قاعدة 3: طول الساق المقابلة للزاوية 60° يساوى طول الساق المقابلة للزاوية 30° مضروباً فى الجذر التربيعى للرقم 3.
- قاعدة 4: طول الارتفاع للمثلث المتساوى الأضلاع يساوى نصف طول الضلع مضروباً فى الجذر التربيعى للرقم 3 (القاعدة 4 هى نتيجة للقاعدة 2).

قواعد المثلث $90^\circ-45^\circ-45^\circ$ Principles of the $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ Triangle

- قاعدة 5: طول الساق المقابلة لزاوية 45° يساوى نصف طول الوتر مضروباً فى الجذر التربيعى للرقم 2.
- قاعدة 6: طول الوتر يساوى طول الضلع مضروباً فى الجذر التربيعى للرقم 2.
- قاعدة 7: فى مربع، طول الخط القطرى يساوى طول الضلع مضروباً فى الجذر التربيعى للرقم 2.

مسألة محلولة 7-3 (a) إذا كان طول الوتر لمثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ يساوى 12. أوجد أطوال ساقيه [شكل (a) 7-8]. (b) كل ساق لشبه منحرف متساوى الساقين تساوى 18. إذا كانت زوايا القاعدة تساوى 60° والقاعدة العليا تساوى 10. أوجد أطوال كل من الارتفاع والقاعدة السفلى [شكل (b) 7-8].

Solved Problem 7-3. (a) If the length of the hypotenuse of a $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ triangle is 12, find the lengths of its legs [Fig. 7-8(a)]. (b) Each leg of an isosceles trapezoid has length 18. If the base angles are 60° and the upper base is 10, find the lengths of the altitude and the lower base [Fig. 7-8(b)].



شكل 7-8

الحل

(a) من قاعدة 1، $a = \frac{1}{2}(12) = 6$. من قاعدة 2، $b = \frac{1}{2}(12)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

(b) من قاعدة 2، $h = \frac{1}{2}(18)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

من قاعدة 1، $\overline{AE} = \overline{FD} = \frac{1}{2}(18) = 9$ ؛ إذن $b = 9 + 10 + 9 = 28$.

الفصل الثامن

المساحات

Areas

فى هذا الفصل:

- ✓ مساحة المستطيل والمربع
- ✓ مساحة متوازى الاضلاع
- ✓ مساحة المثلث
- ✓ مساحة شبه المنحرف
- ✓ مساحة المعين
- ✓ مضلعات لها نفس الحجم أو الشكل

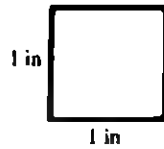
مساحة المستطيل والمربع

Area of a Rectangle and of a Square

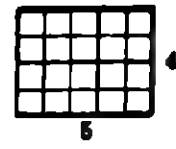
وحدة المربع هى السطح المنغلق بمربع ضلعه يساوى وحدة واحدة (شكل 8-1). مساحة شكل مستوى مغلق مثل المضلع هى عدد وحدات المربع التى يحتوبها السطح. بما أن المستطيل الذى له 5 وحدات طول و4 وحدات عرض يمكن تقسيمه إلى 20 وحدة مربع، تكون مساحته هى 20 وحدة مربع (شكل 8-2).

مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب طول قاعدته فى طول ارتفاعه (شكل 8-3).

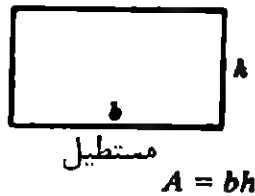
مساحة المربع تساوى مربع طول أحد أضلاعه (شكل 8-4).



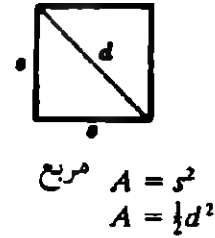
شكل 8-1



شكل 8-2



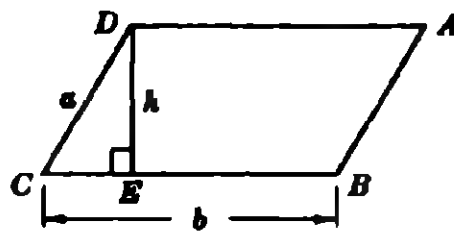
شكل 8-3



شكل 8-4

مساحة متوازي الأضلاع Area of a Parallelogram

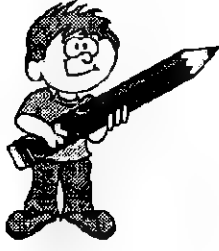
مساحة متوازي الأضلاع تساوى حاصل ضرب طول أحد الأضلاع فى طول الارتفاع لهذا الضلع. إذن، فى $\square ABCD$ (شكل 8-5) إذا كانت $b = 10$ و $h = 2.7$ ، إذن $A = 10(2.7) = 27$.



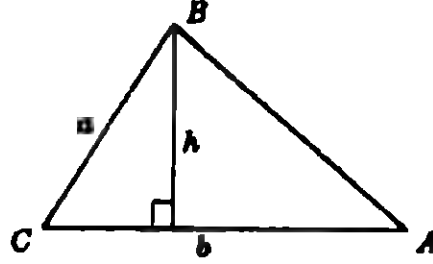
شكل 8-5

Area of a Triangle

مساحة المثلث



مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طول أحد الأضلاع فى طول الارتفاع لهذا الضلع كما هو موضح فى الشكل 8-6.



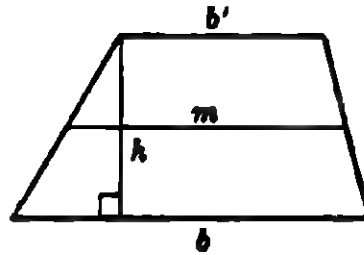
شكل 8-6

Area of a Trapezoid

مساحة شبه المنحرف

مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب طول الارتفاع فى مجموع أطوال قاعدتيه. إذن، إذا كان $h = 20$ ، $b = 27$ ، و $b' = 23$ فى الشكل 8-7، إذن، $A = \frac{1}{2}(20)(27 + 23) = 500$.

مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب طول الارتفاع فى طول القاعدة المتوسطة.



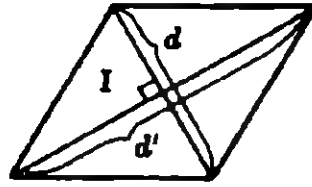
شكل 8-7

Area of a Rhombus

مساحة المعين

مساحة المعين تساوى نصف حاصل ضرب أطوال خطوطه القطرية. بما أن كل خط قطري هو عمود منصف للآخر، مساحة المثلث I فى الشكل 8-8 هى $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}d \right) \left(\frac{1}{2}d' \right) = \frac{1}{8}dd'$. إذن، المعين المكون من أربعة مثلثات

مطابقة للمثلث I، له مساحة تساوى $4 \left(\frac{1}{8}dd' \right)$ أو $\frac{1}{2}dd'$.



$$A = \frac{1}{2}dd'$$

شكل 8-8

مضلعات لها نفس الحجم أو الشكل

Polygons of the Same Size or Shape

شكل 8-9 يوضح ما تقصده عندما نقول إن المضلعين لهما نفس المساحة أو متماثلان أو متطابقان

مضلعات متساوية



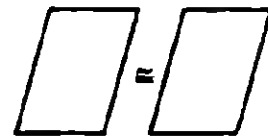
المضلعات التى لها نفس الحجم لها نفس الشكل

مضلعات متماثلة



المضلعات المتماثلة لها نفس الشكل

مضلعات متطابقة



المضلعات المتطابقة لها نفس الحجم ونفس الشكل

شكل 8-9

قاعدة 1: متوازيات الأضلاع لها نفس المساحة إذا كان لها قواعد متطابقة وارتفاعات متطابقة.

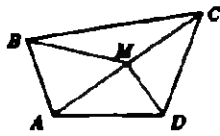
قاعدة 2: المثلثات لها نفس المساحة إذا كان لها قواعد متطابقة وارتفاعات متطابقة.

قاعدة 3: المستقيم المتوسط يقسم المثلث إلى مثلثين لهما نفس المساحة.

قاعدة 4: المثلثات يكون لها نفس المساحة إذا كان لها قاعدة مشتركة ورؤوسها تقع على خط موازٍ للقاعدة.

مسألة محلولة 8-1 أثبت أن M هي نقطة تنصيف الخط القطري \overline{AC} في الشكل الرباعي $ABCD$ ، و \overline{BM} و \overline{DM} مرسومان، فإن مساحة الشكل الرباعي $ABMD$ تساوى مساحة الشكل الرباعي $CBMD$.

Solved Problem 8-1. Prove that if M is the midpoint of diagonal \overline{AC} in quadrilateral $ABCD$, and \overline{BM} and \overline{DM} are drawn, then the area of quadrilateral $ABMD$ equals the area of quadrilateral $CBMD$.



الحل

المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$

M هي نقطة تنصيف الخط القطري \overline{AC} .

إثبات أن: مساحة الشكل الرباعي $ABMD$

تساوى مساحة الشكل الرباعي $CBMD$.

الخطوة: استخدام القاعدة 3 للحصول على

زوجين من المثلثات لهما نفس

المساحة، ثم استخدام مبدأ الجمع.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. M هي نقطة تنصيف \overline{AC} .	1. معطى.
2. \overline{BM} مستقيم متوسط لـ $\triangle ACB$.	2. الخط من رأس المثلث إلى نقطة المنتصف للضلع المقابل هو مستقيم متوسط.
\overline{DM} مستقيم متوسط لـ $\triangle ACD$.	3. المستقيم المتوسط يقسم المثلث إلى مثلثين متساويين فى المساحة.
3. مساحة $(\triangle AMB) =$ مساحة $(\triangle BMC)$.	
مساحة $(\triangle AMD) =$ مساحة $(\triangle DMC)$.	
4. مساحة الشكل الرباعى $ABMD$ تساوى مساحة الشكل الرباعى $CBMD$.	4. إذا جُمعت المتساويات على مستويات، النواتج تكون متساوية.

الفصل التاسع

المضلعات المنتظمة والدائرة

Regular Polygons and the Circle

فى هذا الفصل:

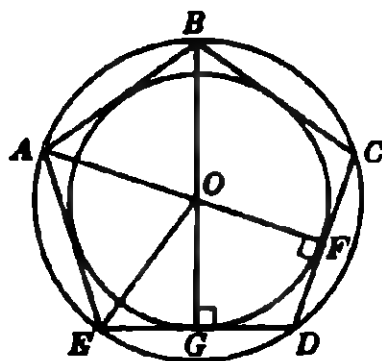
- ✓ المضلعات المنتظمة
- ✓ علاقات القطع المستقيمة فى المضلعات المنتظمة المكونة من 3، 4 و 6 أضلاع
- ✓ مساحة المضلع المنتظم
- ✓ نسب القطع والمساحات للمضلعات المنتظمة
- ✓ محيط ومساحة الدائرة
- ✓ طول القوس؛ مساحة القطاع الدائرى والقطع الدائرى
- ✓ مساحات أشكال مركبة

Regular Polygons

المضلعات المنتظمة

المضلع المنتظم هو مضلع متساوى الأضلاع ومتساوى الزوايا. مركز المضلع هو المركز المشترك لدائرتيه المحوطة والمحيطة. نصف قطر المضلع المنتظم هو أيضاً نصف قطر الدائرة المحيطة. الزاوية المركزية للمضلع المنتظم هي زاوية محصورة بين نصفي قطر مرسومين إلى

رأسين متواليين. نصف قطر الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم (Apothem) هو قطع مستقيم من المركز عمودى على أحد الأضلاع.



شكل 9-1

فى الخماسى المنتظم فى الشكل 9-1، $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$ ، و $m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = m\angle E$. أيضاً، مركزه هو O ، \overline{OA} و \overline{OB} هما أنصاف أقطاره؛ $\angle AOB$ هى زاوية مركزية؛ و \overline{OG} و \overline{OF} هما أنصاف أقطار المحوطة للمضلع المنتظم.

قواعد المضلع المنتظم Regular-Polygon Principles

قاعدة 1: إذا كان المضلع مكون من n ضلع، وطول ضلعه s ، فإن المحيط هو $p = ns$.

قاعدة 2: الدائرة يمكن أن تحيط بأى مضلع منتظم.

قاعدة 3: الدائرة يمكن أن تحوط بأى مضلع منتظم.

قاعدة 4: مركز الدائرة المحيطة بالمضلع المنتظم هو أيضاً مركز الدائرة المحوطة.

قاعدة 5: المضلع المتساوى الأضلاع المحوط فى دائرة هو مضلع منتظم.

قاعدة 6: أنصاف أقطار المضلع المنتظم متطابقة.

قاعدة 7: نصف قطر المضلع المنتظم ينصف الزاوية المرسوم إليها.
 إذن، في الشكل 9-1، \overline{OB} ينصف $\angle ABC$.
 قاعدة 8: أنصاف أقطار الدائرة المحوطة في المضلع المنتظم متطابقة.
 قاعدة 9: أنصاف أقطار الدائرة المحوطة في المضلع المنتظم تنصف الضلع المرسومة إليه.

إذن في الشكل 9-1، \overline{OF} ينصف \overline{CD} ، و \overline{OG} ينصف \overline{ED} .

قاعدة 10: للمضلع المنتظم المكون من n ضلع:

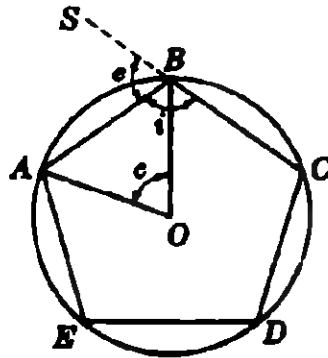
1. كل زاوية مركز c قياسها $\frac{360^\circ}{n}$.
2. كل زاوية داخلية i قياسها $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$.
3. كل زاوية خارجية e قياسها $\frac{360^\circ}{n}$.

إذن للخماسى المنتظم $ABCDE$ في الشكل 9-2،

$$m\angle AOB = m\angle ABS = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$m\angle ABC = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$m\angle ABC + m\angle ABS = 180^\circ \quad \text{و}$$



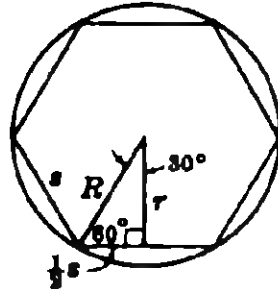
شكل 9-2

علاقات القطع المستقيمة فى المضلعات المنتظمة المكونة من 3، 4 و 6 أضلاع

Relationships of Segments in Regular Polygons of 3, 4, and 6 Sides



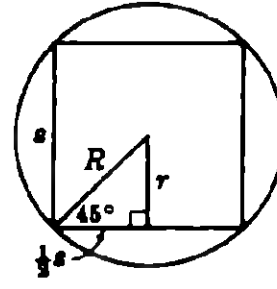
فى الشكل السداسى المنتظم، المربع، المثلث المتساوى الأضلاع، تتكون مثلثات قائمة خاصة عندما يرسم نصف قطر الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم r ونصف قطر R ينتهيان عند نفس الضلع. فى حالة المربع، فإننا نحصل على مثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ ، بينما فى الحالتين الأخرتين، فإننا نحصل على مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$. الصيغ فى الشكل 9-3 تربط أطوال أضلاع وأنصاف أقطار هذه المضلعات المنتظمة.



شكل سداسى منتظم

$$s = R$$

$$r = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$$



مربع

$$s = R\sqrt{2}$$

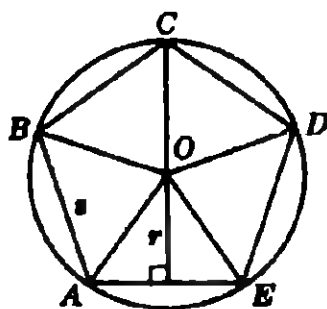
$$r = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$$

شكل 9-3

مساحة المضلع المنتظم Area of a Regular Polygon

مساحة المضلع المنتظم تساوى نصف حاصل ضرب المحيط فى طول نصف قطر الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم كما هو موضح فى الشكل 9-4،

عن طريق رسم أنصاف الأقطار، يمكننا تقسيم المضلع المنتظم المكون من n ضلع ومحيطه $p = ns$ إلى n مثلث، كل له مساحة $\frac{1}{2}rs$. إذن، مساحة المضلع المنتظم هي $n \left(\frac{1}{2}rs \right) = \frac{1}{2}nsr = \frac{1}{2}pr$.



مضلع منتظم
 $A = \frac{1}{2}nsr = \frac{1}{2}pr$

شكل 9-4

نسب القطع والمساحات للمضلعات المنتظمة

Ratios of Segments and Areas of Regular Polygons

- قاعدة 1: المضلعات المنتظمة التي لها نفس عدد الأضلاع متماثلة.
- قاعدة 2: القطع المتناظرة للمضلعات المنتظمة التي لها نفس عدد الأضلاع تكون متناسبة. "القطع" هنا تشمل على الأضلاع، المحيطات، أنصاف الأقطار، أو محيطى الدائرة المحيطة أو المحوطة، وهكذا.
- قاعدة 3: مساحات المضلعات المنتظمة التي لها نفس عدد الأضلاع يكونون لبعضهم مثل مربع أطوال أى قطعين متناظرين.

محيط ومساحة الدائرة

Circumference and Area of a Circle

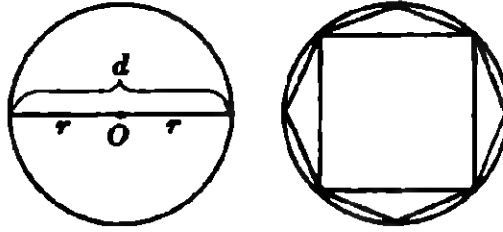
π (pi) هي نسبة المحيط C لأي دائرة قطرها d ؛ هكذا $\pi = C/d$. إذن،

$$C = \pi d \quad \text{أو} \quad C = 2\pi r$$



القيمة التقريبية لـ r هي 3.14.

الدائرة يمكن النظر إليها كمضلع منتظم له عدد لا نهائي من الأضلاع. إذا كان مربع محوط بدائرة وتم مضاعفة عدد الأضلاع باستمرار (لتكوين مئتين، 16-gon، وهكذا)، محيطات المضلعات الناتجة ستقترب أكثر وأكثر من محيط الدائرة (شكل 9-5).



$$\begin{aligned} \text{دائرة: } C &= 2\pi r \\ A &= \pi r^2 \end{aligned}$$

شكل 9-5

لإيجاد مساحة الدائرة، الصيغة $A = \frac{1}{2} \pi r$ يمكنك استخدامها بالتعويض

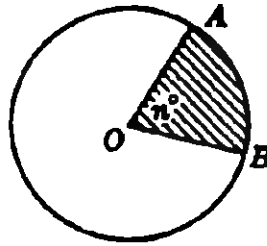
$$\text{بالقيمة } C \text{ مكان } p; \text{ بعمل ذلك نحصل على } A = \frac{1}{2} Cr = \frac{1}{2} (2\pi r)(r) = \pi r^2.$$

كل الدوائر أشكال متماثلة حيث أنها لها نفس الشكل. ولأنها أشكال متماثلة، (1) القطع المتناظرة في الدوائر تتناسب و(2) مساحتي دائرتين يمثلان لبعضهما كـ مربع أنصاف أقطارهما أو محيطهما.

طول القوس؛ مساحة القطاع الدائري والقطاع الدائري

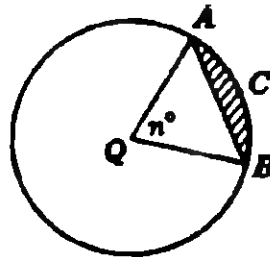
Length of an Arc; Area of a Sector and a Segment

القطاع الدائري هو جزء من دائرة محددة بنصفى قطر وقوسهم المنحصر. إذن، فى الشكل 9-6، الجزء المظلل من الدائرة O هو القطاع الدائري OAB .



شكل 9-6

القطاع الدائري هو جزء من دائرة محدد بوتر وقوسه. القطاع الثانوى للدائرة هو الأصغر من القطعين المتكونين. إذن، فى الشكل 9-7، الجزء المظلل للدائرة Q هو القطاع الثانوى للقوس \widehat{ACB} .



شكل 9-7

قاعدة 1: لدائرة نصف قطرها r ، الطول l لقوس قياسه n° يساوى $\frac{n}{360}$

من محيط الدائرة، أو $l = \frac{n}{360} 2\pi r = \frac{\pi nr}{180}$.

قاعدة 2: لدائرة نصف قطرها r ، المساحة K لقطاع قياسه n° تساوى

$\frac{n}{360}$ من مساحة الدائرة أو $K = \frac{n}{360} \pi r^2$.

$$\text{قاعدة 3: } \frac{n}{360} = \frac{\text{طول قوس قياسه } n^\circ}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{مساحة قطاع من } n^\circ}{\text{مساحة الدائرة}}$$

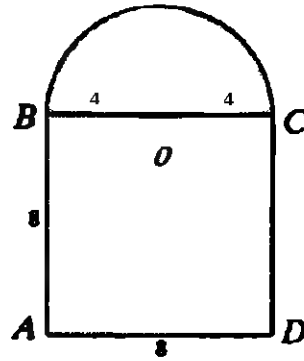
قاعدة 4: مساحة القطع الثانوى لدائرة يساوى مساحة القطاع ناقص مساحة المثلث المتكون من أنصاف الأقطار والوتر.

قاعدة 5: إذا كان المضلع المنتظم محوط فى دائرة، كل قطع يتكون من الضلع له مساحة تساوى الفرق بين مساحة الدائرة ومساحة المضلع مقسومة على عدد الأضلاع.

مساحات أشكال مركبة Areas of Combination Figures

مساحات أشكال مركبة مثل التى فى الشكل 8-9 يمكن إيجادها عن طريق معرفة المساحات المستقلة ثم الجمع أو الطرح كما يتطلب الأمر. إذن، المساحة المظللة فى الشكل تساوى مجموع مساحات المربع ونصف الدائرة:

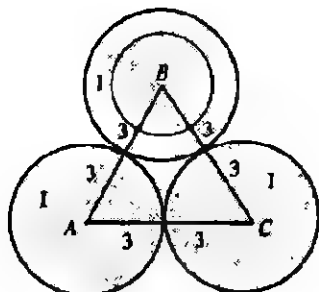
$$A = 8^2 + \frac{1}{2}(16\pi) = 64 + 8\pi$$



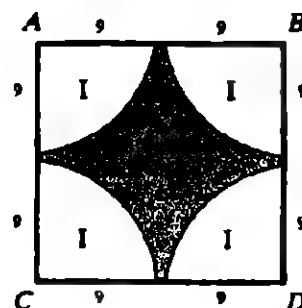
شكل 8-9

مسألة محلولة 9-1: أوجد المساحة المظللة فى كل جزء من الشكل 9-9. فى (a) الدوائر A و B و C متماسة من الخارج وكل منها له نصف قطر 3. فى (b) كل قوس هو جزء من دائرة نصف قطرها 9.

Solved Problem 9-1: Find the shaded area in each part of Fig. 9-9. In (a), circles A, B, and C are tangent externally and each has a radius 3. In (b), each arc is part of a circle of radius 9.



(a)



(b)

شكل 9-9

الحل:

= مساحة $\triangle ABC$ (a)

$$\frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(6^2)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

= مساحة القطاع I

$$\frac{n^\circ}{360^\circ}(\pi r^2) = \frac{300}{360}(9\pi) = \frac{15}{2}\pi$$

= المساحة المظللة

$$9\sqrt{3} + 3\left(\frac{15}{2}\pi\right) = 9\sqrt{3} + \frac{45}{2}\pi$$

324 = 18^2 = مساحة المربع (b)

= مساحة القطاع I

$$I = \frac{n^\circ}{360^\circ}(\pi r^2) = \frac{90}{360}(81\pi) = \frac{81}{4}\pi$$

= المساحة المظللة

$$324 - 4\left(\frac{81}{4}\pi\right) = 324 - 81\pi$$

الفصل العاشر

إنشاءات

Constructions

فى هذا الفصل:

- ✓ قطع وزوايا متطابقة
- ✓ إنشاء المنصفات والأعمدة
- ✓ إنشاء مثلث
- ✓ إنشاء خطوط متوازية
- ✓ إنشاءات الدائرة
- ✓ الإحاطة الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم
- ✓ إنشاء مثلثات متماثلة

قطع وزوايا متطابقة Duplicating Segments and Angles

إنشاء 1: لإنشاء قطعة مستقيمة مطابقة لقطعة مستقيمة معلومة.

معطى: القطعة المستقيمة \overline{AB} (شكل 10-1).

إنشاء: قطعة مستقيمة مطابقة للقطعة \overline{AB} .

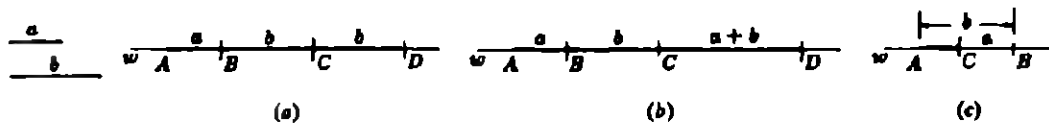
الإنشاء: على خط عمل w ، باستخدام أى نقطة C كمركز ونصف قطر يساوى \overline{AB} ، أنشئ قوساً يقطع w فى D . إذن \overline{CD} هى القطعة المستقيمة المطلوبة.



شكل 10-1

مسألة محلولة 10-1: معطى قطع مستقيمة بأطوال a و b (شكل 10-2)، أنشئ قطعاً مستقيمة بأطوال تساوى (a) $a + 2b$ ؛ (b) $2(a + b)$ ؛ و (c) $b - a$.

Solved Problem 10-1: Given line segments with lengths a and b (Fig. 10-2), construct line segments with lengths equal to (a) $a + 2b$; (b) $2(a + b)$; and (c) $b - a$.



شكل 10-2

الحل: باستخدام الإنشاء 1

(a) على خط عمل w ، أنشئ قطعة مستقيمة \overline{AB} طولها a . من B ، أنشئ قطعة مستقيمة طولها يساوى b ، إلى النقطة C ؛ من النقطة C ، أنشئ قطعة مستقيمة طولها b ، إلى النقطة D ، إذن \overline{AD} هي القطعة المستقيمة المطلوبة.

(b) كما فى (a)، $AD = a + b + (a + b)$.

(c) كما فى (a)، أولاً أنشئ \overline{AB} بطول b ، ثم \overline{BC} بطول a . $AC = b - a$.

إنشاء 2: لإنشاء زاوية مطابقة لزاوية معلومة.

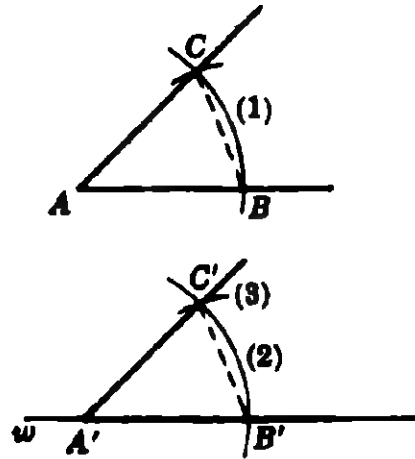
معطى: $\angle A$ (شكل 10-3).

لإنشاء: زاوية مطابقة للزاوية $\angle A$.

الإنشاء: باستخدام A كمركز ونصف قطر ملائم، أنشئ قوساً.

(1) يقطع أضلاع $\angle A$ فى B و C . باستخدام A' ، النقطة الواقعة على

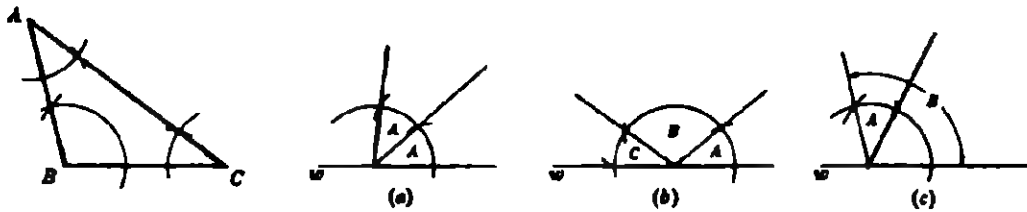
خط العمل w كمركز وينفس نصف القطر، أنشئ القوس (2) الذى يقطع w فى B' . باستخدام B' كمركز ونصف قطر يساوى \overline{BC} ، أنشئ القوس (3) الذى يقطع القوس (2) فى C' . ارسم $\overline{A'C'}$. إذن $\angle A'$ هى الزاوية المطلوبة. ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ عن طريق s.s.s \cong s.s.s؛ إذن $\angle 1 \cong \angle 2$)



شكل 10-3

مسألة محلولة 10-2: معطى $\triangle ABC$ فى الشكل 10-4، أنشئ زوايا قياسها يساوى (a) $2A$ ، (b) $A + B + C$ ؛ و (c) $B - A$.

Solved Problem 10-2: Given $\triangle ABC$ in Fig. 10-4, construct angles whose measures are equal to (a) $2A$; (b) $A + B + C$; and (c) $B - A$.



شكل 10-4

الحل: باستخدام الإنشاء 2:

(a) باستخدام خط العمل w كضلع، طابق $\angle A$. أنشئ نسخة مطابقة

أخرى للزاوية $\angle A$ مجاورة لـ $\angle A$ ، كما هو موضح. الأضلاع الخارجية للزاوية المنسوخة تُكوّن الزاوية المطلوبة.

(b) باستخدام خط العمل w كضلع طابق $\angle A$. أنشئ $\angle B$ مجاورة للزاوية $\angle A$ ثم أنشئ $\angle C$ مجاورة للزاوية $\angle B$. الأضلاع الخارجية للزاوية المنسوخة A و C يُكوّنوا الزاوية المطلوبة. لاحظ أن الزاوية هي زاوية مستقيمة.

(c) باستخدام خط العمل w كضلع $\angle B$ ، ثم طابق $\angle A$ من الضلع الجديد لـ $\angle B$ كما هو موضح. الفرق هو الزاوية المطلوبة.

إنشاء المنصفات والأعمدة

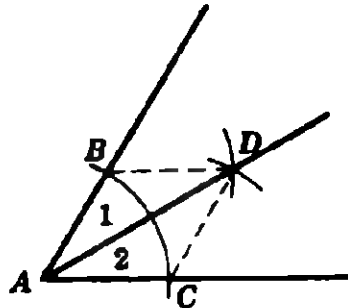
Constructing Bisectors and Perpendiculars

إنشاء 3: لتتصيف زاوية معلومة.

معطى: $\angle A$ (شكل 10-5).

لإنشاء: منصف $\angle A$.

الإنشاء: باستخدام A كمركز وينصف قطر ملائم، أنشئ قوس يقطع أضلاع $\angle A$ في B و C . باستخدام B و C كمراكز وأنصاف أقطار متساوية. أنشئ أقواساً تتقاطع في D . ارسم \overrightarrow{AD} . إذن \overrightarrow{AD} هو المنصف المطلوب. ($\triangle ABD \cong \triangle ADC$ عن طريق s.s.s؛ إذن $\angle 1 \cong \angle 2$)



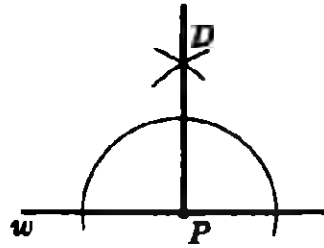
شكل 10-5

إنشاء 4: لإنشاء خط عمودي على خط معلوم خلال نقطة معلومة على الخط.

معطى: الخط w والنقطة P على w (شكل 10-6).

لإنشاء: عمودي على w عند P .

الإنشاء: باستخدام الإنشاء 3، نصف الزاوية المستقيمة عند P . إذن \overrightarrow{DP} هو العمود المطلوب؛ \overrightarrow{DP} هو الخط المطلوب.



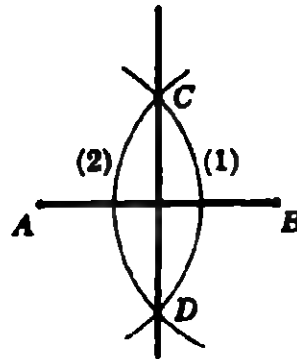
شكل 10-6

إنشاء 5: لتتصيف قطع مستقيم معلوم (لإنشاء عمود منتصف لقطع مستقيم معلوم).

معطى: القطع المستقيم \overline{AB} (شكل 10-7).

لإنشاء: العمود المنتصف للقطع \overline{AB} .

الإنشاء: باستخدام A كمركز ونصف قطر أكبر من نصف \overline{AB} ، أنشئ القوس (1) باستخدام B كمركز ونفس نصف القطر، أنشئ القوس (2) يقطع

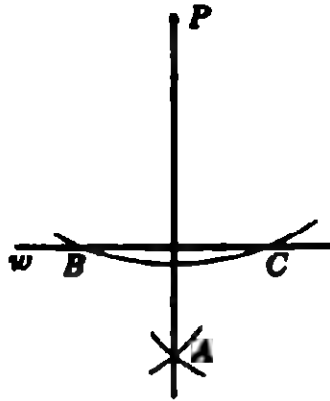


شكل 10-7

القوس (1) في C و D . ارسم \overleftrightarrow{CD} . هو العمود المنصف للقطع \overline{AB} المطلوب. (نقطتان على بُعد متساوٍ من نهايتي القطع، يُعرفان العمود المنصف للقطع).

إنشاء 6: لإنشاء خط عمودي على خط معلوم خلال نقطة خارجية معلومة. معطى: الخط w والنقطة P خارج w (شكل 10-8). لإنشاء: عمود على w خلال P .

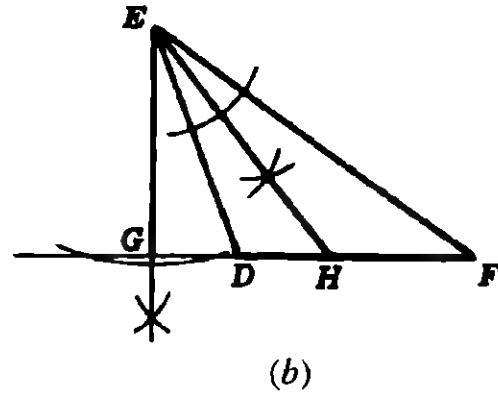
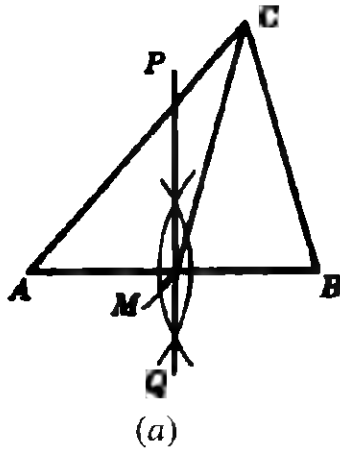
الإنشاء باستخدام P كمركز ونصف قطر طوله كافٍ، أنشئ قوساً يقطع w في B و C . باستخدام C و B كمراكز وأنصاف أقطار متساوية وطولها أكبر من نصف \overline{BC} . أنشئ أقواساً تتقاطع في A . ارسم \overleftrightarrow{PA} . إذن \overleftrightarrow{PA} هو العمود المطلوب. (كل من النقاط P و A على بُعد متساوٍ من B و C).



شكل 10-8

مسألة محلولة 10-3: في المثلث غير المتساوي الأضلاع $\triangle ABC$ [شكل 10-9 (a)]، أنشئ (a) عمود منصف للقطع \overline{AB} و (b) المستقيم المتوسط للقطع \overline{AB} . في $\triangle DEF$ [شكل 10-9 (b)]، D زاوية منفرجة؛ أنشئ (c) الارتفاع \overline{DF} و (d) منصف الزاوية E ($\angle E$).

Solved Problem 10-3: In scalene $\triangle ABC$ [Fig. 10-9(a)], construct (a) a perpendicular bisector of \overline{AB} and (b) a median to \overline{AB} . In $\triangle DEF$ [Fig. 10-9(b)], D is an obtuse angle; construct (c) the altitude to \overline{DF} and (d) the bisector of $\angle E$.



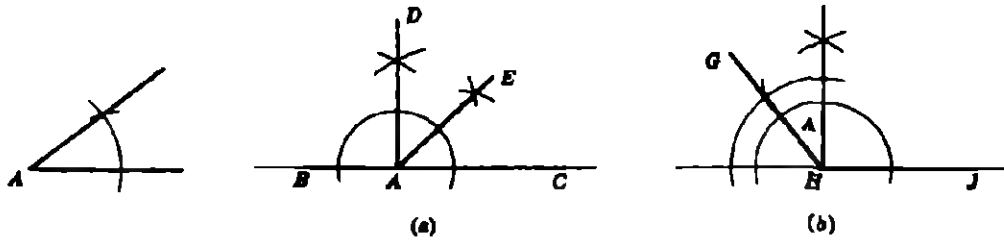
شكل 10-9

الحل:

- (a) نستخدم الإنشاء 5 لإيجاد \overrightarrow{PQ} ، العمود المنصف للقطع \overline{AB} .
 (b) النقطة M تنصف \overline{AB} . ارسم \overline{CM} ، المستقيم المتوسط للقطع \overline{AB} .
 (c) نستخدم الإنشاء 6 لإيجاد \overline{EG} ، الارتفاع إلى \overline{DF} (ممتد).
 (d) نستخدم الإنشاء 3 لإيجاد $\angle E$. \overline{EH} هو المنصف المطلوب.

مسألة محلولة 10-4: (a) أنشئ زوايا قياسها 90° ، 45° و 135° . (b) معطى زاوية قياسها A (شكل 10-10)، أنشئ زاوية قياسها $90^\circ + A$.

Solved Problem 10-4: (a) Construct angles measuring 90° , 45° , and 135° . (b) Given an angle with measure A (Fig. 10-10), construct an angle whose measure is $90^\circ + A$.



شكل 10-10

الحل:

(a) في الشكل 10-10 (a)، $m\angle DAB = 90^\circ$ ، $m\angle CAE = 45^\circ$ ، $m\angle BAE = 135^\circ$.

(b) في الشكل 10-10 (b)، $m\angle GHJ = 90^\circ + A$.

Constructing a Triangle

إنشاء مثلث

Determining a Triangle

تحديد المثلث

يتم تحديد المثلث عندما تهى مجموعة المعلومات المعطاة حجمه وشكله. بما أن الأجزاء المطلوب لإثبات تطابق المثلثات تهى شكل وحجم المثلث، فإن المثلث يمكن تحديده عندما تكون المعلومات (المعطيات) تتكون من ثلاثة أضلاع، أو ضلعين والزاوية المحصورة بين هذين الضلعين، أو زاويتين وضلع محصور بين هاتين الزاويتين، أو زاويتين وضلع غير محصور بين هاتين الزاويتين، أو الوتر وأى من ساقي المثلث القائم.

رسم تخطيطي للمثلثات المطلوب إنشاؤها

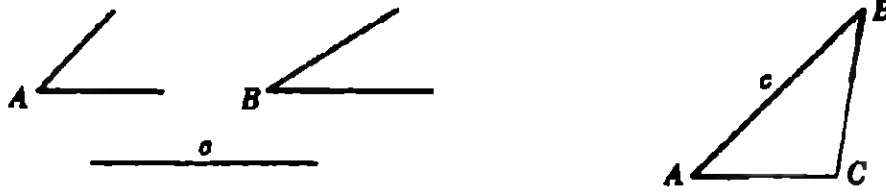
Sketching Triangles to be Constructed

قبل عمل الإنشاء الفعلى، فإنه من المساعد عمل رسم تخطيطي تمهيدى للمثلث المطلوب. فى هذا الرسم التخطيطي:

1. نظهر موضع كل من الأجزاء المعلومة للمثلث.
2. نرسم الأجزاء المعلومة بخط ثقيل، الأجزاء المتبقية بخط خفيف.
3. نقرب أحجام الأجزاء المعلومة.

4. نستخدم حروف صغيرة للأضلاع لتتوافق مع الحروف الكبيرة للزوايا المقابلة لهم.

كمثال، يمكنك عمل رسم تخطيطي مثل الذى فى الشكل 10-11 قبل إنشاء المثلث بمعلومية زاويتين والضلع المحصور بينهما.



شكل 10-11

Triangle Constructions

إنشاءات المثلث

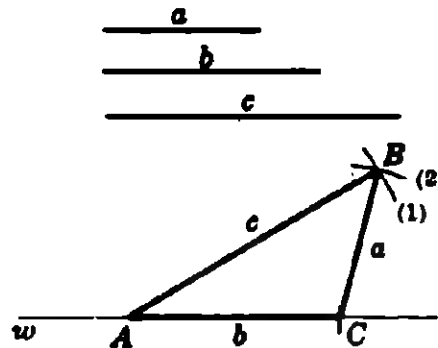
إنشاء 7: لإنشاء مثلث بمعلومية أضلاعه الثلاثة.

معطى: أضلاع طولها a ، b و c (شكل 10-12).

لإنشاء: $\triangle ABC$.

الإنشاء: على خط العمل w ، أنشئ \overline{AC} بحيث $AC = b$. باستخدام A كمركز و c كنصف قطر، أنشئ القوس (1). ثم باستخدام C كمركز و a كنصف قطر، أنشئ القوس (2) بحيث يقطع القوس (1) فى B . ارسم \overline{AB} و \overline{BC} .

$\triangle ABC$ هو المثلث المطلوب.



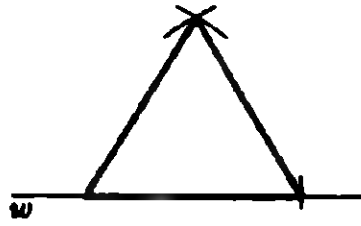
شكل 10-12

إنشاء 8: لإنشاء زاوية قياسها 60° .

معطى: الخط w (شكل 10-13).

إنشاء: زاوية قياسها 60° .

الإنشاء: باستخدام طول ملائم كضلع، أنشئ مثلث متساوي الأضلاع باستخدام الإنشاء 7. إذن، أى زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع هى الزاوية المطلوبة.



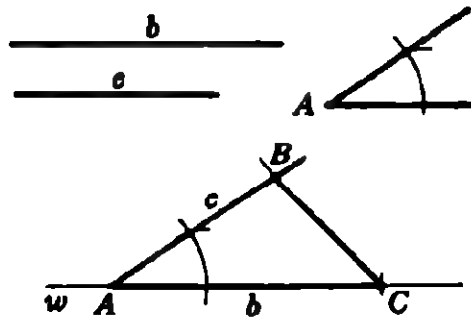
شكل 10-13

إنشاء 9: لإنشاء مثلث معلوم ضلعا والزاوية المحصورة بينهما.

معطى: $\angle A$ ، قطعان طولهما b و c (شكل 10-14).

إنشاء: $\triangle ABC$.

الإنشاء: على خط العمل w ، أنشئ \overline{AC} بحيث $AC = b$. عند A ، أنشئ $\angle A$ بحيث يكون أحد الأضلاع على \overline{AC} . على الجانب الآخر من $\angle A$ ، أنشئ \overline{AB} بحيث $AB = c$ ، ارسم \overline{BC} . إذن، المثلث المطلوب هو $\triangle ABC$.



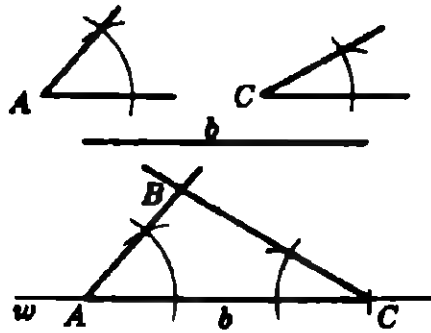
شكل 10-14

إنشاء 10: لإنشاء مثلث بمعلومية زاويتين والضلع المحصور بينهما.

معطى: $\angle A$ ، $\angle C$ ، وقطع طوله b (شكل 10-15).

لإنشاء: $\triangle ABC$.

الإنشاء: على خط العمل w ، أنشئ \overline{AC} بحيث $AC = b$. عند A ، أنشئ $\angle A$ بحيث يكون أحد الأضلاع على \overline{AC} وعند C أنشئ $\angle C$ بحيث يكون أحد الأضلاع على \overline{AC} . مد الأضلاع الجديدة للزوايا حتى يتقابلوا، عند B .



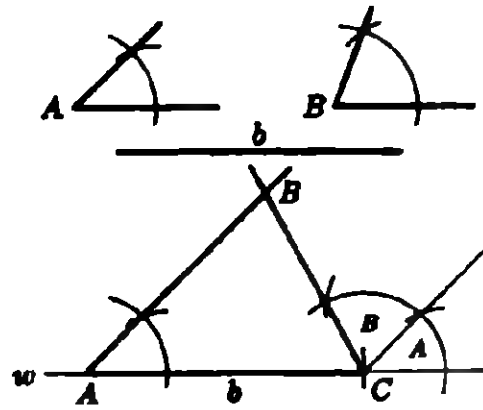
شكل 10-15

إنشاء 11: لإنشاء مثلث بمعلومية زاويتين وضلع غير محصور بينهما.

معطى: $\angle A$ ، $\angle C$ ، وقطع طوله b (شكل 10-16).

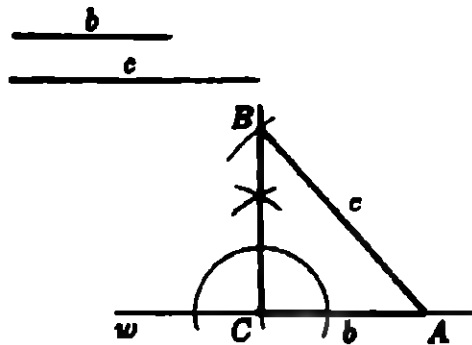
لإنشاء: $\triangle ABC$.

الإنشاء: على خط العمل w ، أنشئ \overline{AC} بحيث $AC = b$. عند C ، أنشئ زاوية قياسها يساوى $m\angle A + m\angle B$ بحيث يكون امتداد \overline{AC} هو أحد أضلاع الزاوية. المتبقى من الزاوية المستقيمة عند C سيكون $\angle C$. عند A ، أنشئ $\angle A$ بحيث يكون أحد الأضلاع على \overline{AC} . تقاطع الأضلاع الجديدة للزاوية هي B .



شكل 10-16

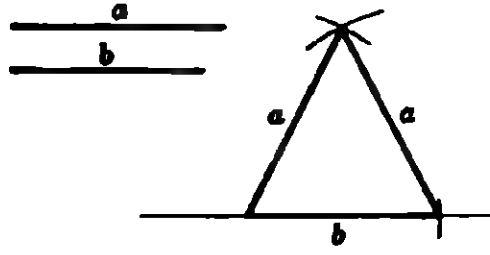
إنشاء 12: لإنشاء مثلث قائم بمعلومية وتره وساق.
 معطى: وتر طوله c وساق طولها b للمثلث القائم ABC (شكل 10-17).
 لإنشاء: المثلث القائم ABC .
 الإنشاء: على خط العمل w ، أنشئ \overline{AC} بحيث $AC = b$. عند C ، أنشئ عموداً على \overline{AC} . باستخدام A كمركز ونصف قطر c ، أنشئ قوساً يقطع العمود عند B .



شكل 10-17

مسألة محلولة 10-5: أنشئ المثلث المتساوي الساقين، بمعلومية أطوال القاعدة وذراع (شكل 10-18).

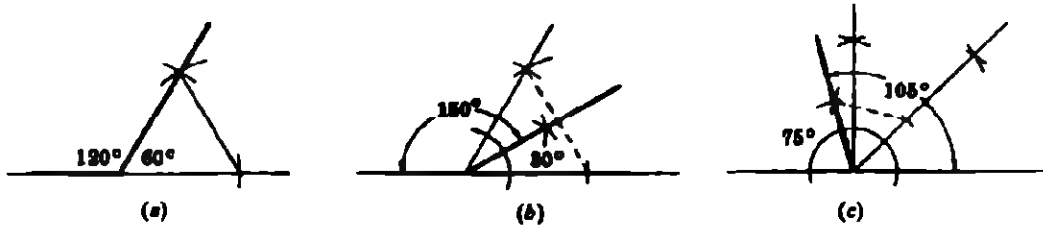
Solved Problem 10-5: Construct an isosceles triangle, given the lengths of the base and an arm (Fig. 10-18).



شكل 10-18

الحل: باستخدام الإنشاء 7، حيث أن الثلاثة أضلاع للمثلث معلومة.
مسألة محلولة 10-6: أنشئ زاوية قياسها (a) 120° ؛ (b) 35° ؛ (c) 150° ؛ (d) 105° ؛ (e) 75° .

Solved Problem 10-6: Construct an angle of measure (a) 120° ; (b) 30° ; (c) 150° ; (d) 105° ; and (e) 75° .



شكل 10-19

الحل:

- (a) باستخدام الإنشاء 8 [شكل (a) 10-19] لإنشاء 120° كأنها $180^\circ - 60^\circ$.
(b) باستخدام الإنشاء 8 و 3 لإنشاء 30° كأنها $\frac{1}{2}(60^\circ)$ [شكل (b) 10-19].
(c) باستخدام (b) لإنشاء 150° كأنها $180^\circ - 30^\circ$ [شكل (b) 10-19].
(d) باستخدام الإنشاءات 3، 4 و 8 لإنشاء 105° كأنها $60^\circ + \frac{1}{2}(90^\circ)$ [شكل (c) 10-19].
(e) باستخدام (d) لإنشاء 75° كأنها $180^\circ - 105^\circ$ [شكل (c) 10-19].

إنشاء خطوط متوازية Constructing Parallel Lines

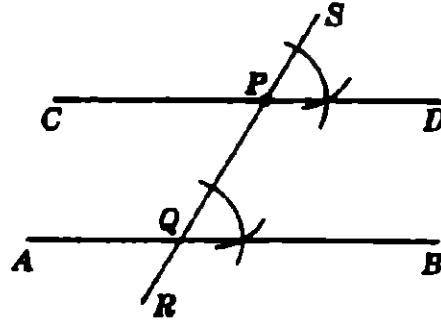
إنشاء 13: لإنشاء خط موازٍ لخط معلوم خلال نقطة خارجية معلومة.

معطى: \overleftrightarrow{AB} ونقطة خارجية P (شكل 10-20).

لإنشاء: خط خلال P يوازي \overleftrightarrow{AB} .

الإنشاء: ارسم خط \overleftrightarrow{RS} خلال P يقطع \overleftrightarrow{AB} في Q . أنشئ $\angle SPD \cong \angle PQB$.

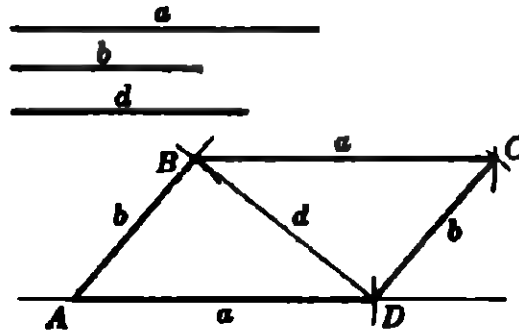
إذن، \overleftrightarrow{CD} هو المتوازي المطلوب. (إذا كانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتين، فإن الخطوط المقطوعة بالخط المستعرض تكون متوازية).



شكل 10-20

مسألة محلولة 10-7: أنشئ متوازي الأضلاع بمعلومية أطوال ضلعين متجاورين a و b وخط قطري d (شكل 10-21).

Solved Problem 10-7: Construct a parallelogram given the lengths of two adjacent sides a and b and of a diagonal d (Fig. 10-21).



شكل 10-21

الحل:

ثلاثة رؤوس لمتوازي الأضلاع تم الحصول عليها عن طريق إنشاء $\triangle ABD$ باستخدام الإنشاء 7. الرأس الرابعة C ، تم الحصول عليها بإنشاء $\triangle BCD$ على الخط القطري \overline{BC} باستخدام الإنشاء 7. الرأس C يمكن أيضاً الحصول عليها عن طريق إنشاء $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ و $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$.

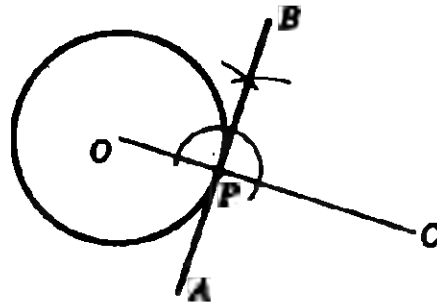
Circle Constructions

إنشاءات الدائرة

إنشاء 14: لإنشاء مماس لدائرة معلومة خلال نقطة معلومة على الدائرة .
معطى: الدائرة O والنقطة P على الدائرة (شكل 10-22).

لإنشاء: مماس للدائرة O عند P .

الإنشاء: ارسم نصف القطر \overline{OP} ومده خارج الدائرة. أنشئ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OP}$ عند P . هو المماس المطلوب. (الخط العمودي على نصف القطر عند طرفه الخارجى هو مماس للدائرة).



شكل 10-22

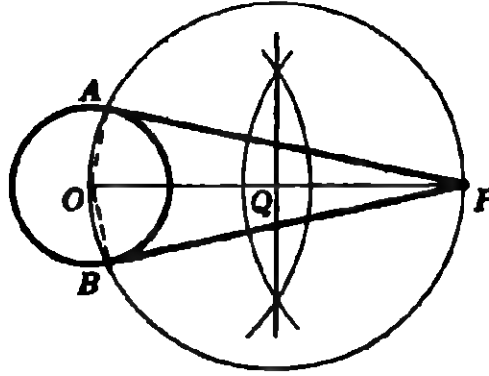
إنشاء 15: لإنشاء مماس لدائرة معلومة خلال نقطة معلومة تقع خارج الدائرة.

معطى: الدائرة O والنقطة P خارج الدائرة (شكل 10-23).

لإنشاء: مماس للدائرة O عند P .

الإنشاء: ارسم \overline{OP} ، واجعل \overline{OP} قطر لدائرة جديدة Q . وصل P بـ A

و B نقطتا تقاطع الدائرتان O و Q . إذن، \overline{PA} و \overline{PB} مماسات. ($\angle OAP$ و $\angle OBP$ زاويتان قائمتان، بما أن الزوايا المحوطة في أنصاف الدوائر زوايا قائمة).



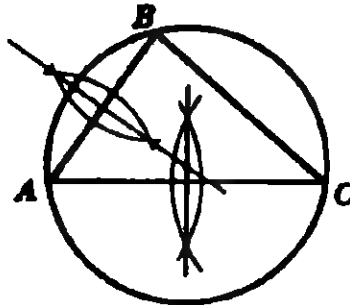
شكل 10-23

إنشاء 16: لإحاطة دائرة حول مثلث من الخارج.

معطى: $\triangle ABC$ (شكل 10-24).

لإنشاء: الدائرة المحيطة حول $\triangle ABC$.

الإنشاء: أنشئ الأعمدة المنصفة لضلعي في المثلث. تقاطعهما هو مركز الدائرة المطلوبة، والقطر إلى أى رأس هو نصف القطر. (أى نقطة على العمود المنصف لقطع تكون على مسافات متساوية من نهايتي هذا القطع).



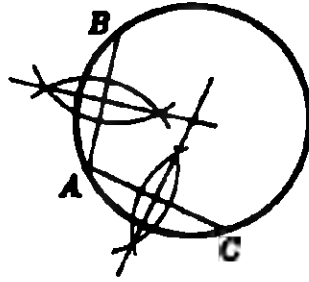
شكل 10-24

إنشاء 17: لتعيين مركز دائرة معلومة.

معطى: دائرة (شكل 10-25).

لإنشاء: مركز الدائرة المعلومة.

الإنشاء: اختار أى ثلاث نقاط A, B, C على الدائرة. أنشئ الأعمدة المنصفة للقطع المستقيمة \overline{AB} و \overline{AC} . تقاطع هذه الأعمدة المنصفة هو مركز الدائرة.



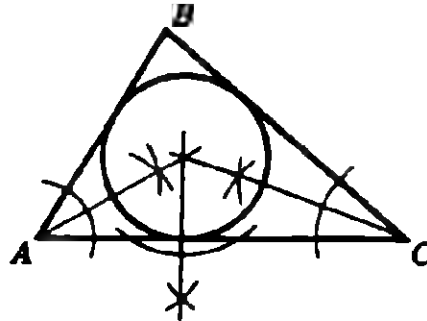
شكل 10-25

إنشاء 18: لإحاطة دائرة حول مثلث معلوم من الداخل.

معطى: $\triangle ABC$ (شكل 10-26).

إنشاء: الدائرة المحيطة في $\triangle ABC$.

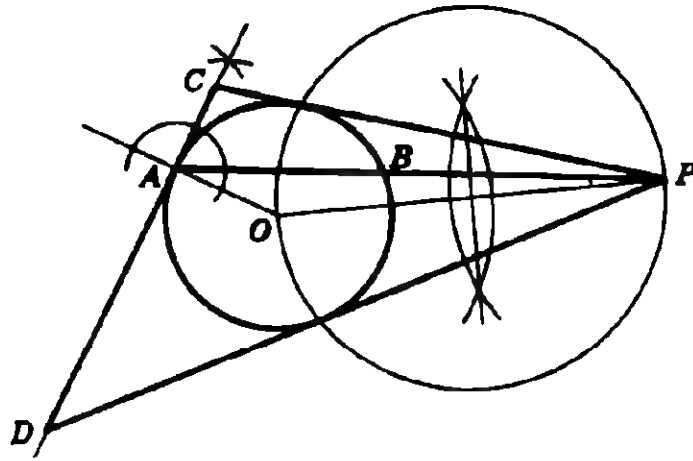
الإنشاء: أنشئ المنصفات لزاويتي في $\triangle ABC$. تقاطعهما هو مركز الدائرة المطلوبة. والمسافة (العمودية) لأى ضلع هي نصف القطر (أى نقطة على منتصف الزاوية تكون على مسافات متساوية من أضلاع الزاوية).



شكل 10-26

مسألة محلولة 10-8: القاطع من نقطة P خارج الدائرة O في الشكل 10-27 يقابل الدائرة في B و A . أنشئ مثلثاً محيطاً بالدائرة بحيث يكون اثنان من أضلاعه متقابلين في P والضلع الثالث مماس للدائرة عند A .

Solved Problem 10-8: A secant from a point P outside circle O in Fig. 10-27 meets the circle in B and A . Construct a triangle circumscribed about the circle so that two of its sides meet in P and the third side is tangent to the circle at A .



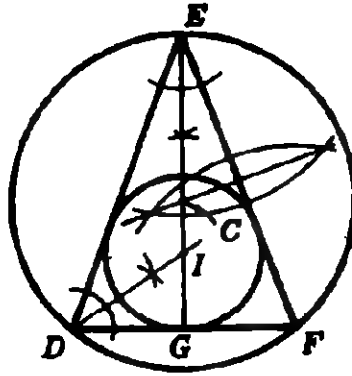
شكل 10-27

الحل:

باستخدام الإنشاءات 14 و 15: عند A ، أنشئ مماساً للدائرة O . من P ، أنشئ مماسات للدائرة O تقطع المماس الأول في C و D . المثلث المطلوب هو $\triangle PCD$.

مسألة محلولة 10-9: ارسم الدائرة المحيطة والمحوطة للمثلث المتساوي الأضلاع DEF في الشكل 10-28.

Solved Problem 10-9: Construct the circumscribed and inscribed circles of isosceles triangle DEF in Fig. 10-28.



شكل 10-28

الحل:

استخدم الإنشاءات 16 و 18. بعمل ذلك، لاحظ أن منتصف $\angle E$ هو أيضاً العمود المنصف للقطع \overline{DF} . إذن مركز كل دائرة يقع على \overline{EG} . I ، مركز الدائرة المحوطة وجد بإنشاء منتصف $\angle D$ أو $\angle F$. C ، مركز الدائرة المحيطة وجد بإنشاء العمود المنصف للقطع \overline{DE} أو \overline{EF} .

الإحاطة الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم

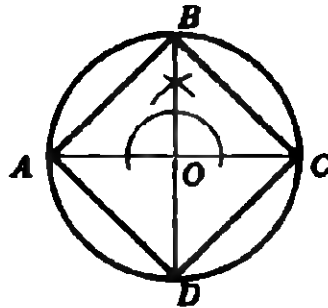
Inscribing and Circumscribing Regular Polygons

إنشاء 19: لإحاطة دائرة حول مربع من الخارج.

معطى: الدائرة O (شكل 10-29).

لإنشاء: مربع محاط بالدائرة O .

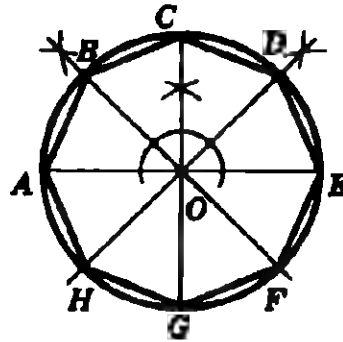
الإنشاء: ارسم قطرًا، وأنشئ قطرًا آخر عمودياً عليه. وصل بين نهايات الأقطار لتكوين المربع المطلوب.



شكل 10-29

إنشاء 20: لإحاطة مثنى منتظم داخل بدائرة معلومة.
معطى: الدائرة O (شكل 10-30).

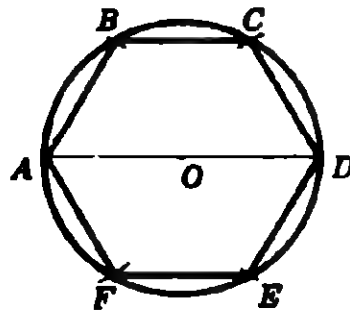
لإنشاء: مثنى منتظم محاط بالدائرة O .
الإنشاء: كما فى إنشاء 19، أنشئ أقطاراً متعامدة. ثم نصف الزوايا المتكونة من هذه الأقطار، لتقسيم الدائرة إلى ثمان أقواس متطابقة. أوتار هذه الأقواس هى أضلاع المثنى المنتظم المطلوب.



شكل 10-30

إنشاء 21: لإحاطة سدس منتظم بدائرة معلومة.
معطى: دائرة O (شكل 10-31).

لإنشاء: سدس منتظم محاط بالدائرة O .
الإنشاء: ارسم القطر AD وباستخدام A و D كمراكز، أنشئ أربعة أقواس لها نفس نصف قطر الدائرة O ويقطعون الدائرة. أنشئ السدس المنتظم المطلوب عن طريق وصل النقاط المتتالية التى تتقاطع فيها الأقواس مع الدائرة.



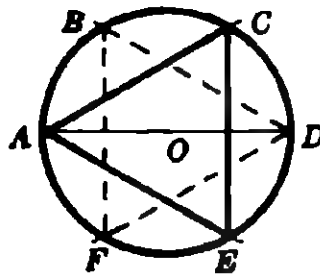
شكل 10-31

إنشاء 22: لإحاطة مثلث متساوى الأضلاع بدائرة معلومة.

معطى: الدائرة O (شكل 10-32).

لإنشاء: مثلث متساوى الأضلاع محاط بدائرة O .

الإنشاء: المثلثات المتساوية الأضلاع المحوطة يمكن الحصول عليها عن طريق وصل نقاط التقسيم الست التي تم الحصول عليها فى الإنشاء 21 بالتبادل.



شكل 10-32

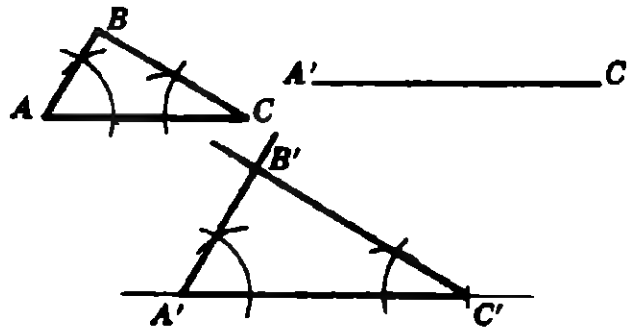
إنشاء مثلثات متماثلة Constructing Similar Triangles

إنشاء 23: لإنشاء مثلث مماثل لمثلث معلوم على قطع مستقيم معلوم كقاعدة.

معطى: $\triangle ABC$ وقطع مستقيم $A'C'$ (شكل 10-33).

لإنشاء: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ على $\overline{A'C'}$ كقاعدة.

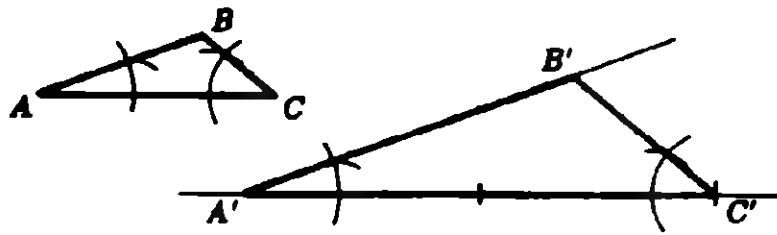
الإنشاء: على $\overline{A'C'}$ ، أنشئ $\angle A' \cong \angle A$ و $\angle C' \cong \angle C$ باستخدام إنشاء 2. مد الأضلاع الأخرى حتى يتلاقوا، عند B . (إذا كانت زاويتان لمثلث مطابقين لزاويتين فى مثلث آخر. يكون المثلثان متماثلين).



شكل 10-33

مسألة محلولة 10-10: أنشئ مثلثاً مماثلاً للمثلث ABC في الشكل 10-34، بقاعدة طولها ضعف طول قاعدة المثلث المعلوم.

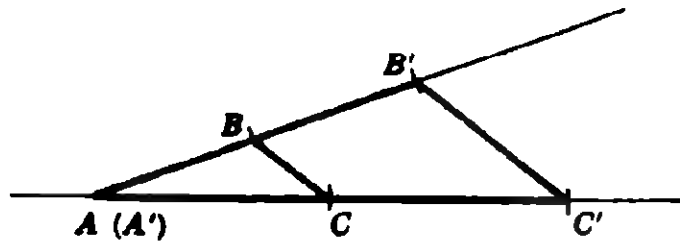
Solved Problem 10-10: Construct a triangle similar to triangle ABC in Fig. 10-34, with a base twice as long as the base of the given triangle.



شكل 10-34

الحل:

أنشئ $\overline{A'C'}$ ضعف طول \overline{AC} . ثم استخدم إنشاء 23. وسيلة بديلة (شكل 10-35): مد ضلعي $\triangle ABC$ لضعف طولهما ووصل بين نقط النهايات.



شكل 10-35

ملحق (A) صيغ للمرجع Formulas for Reference

صيغ الزاوية Angle Formulas

1. $c = 90^\circ - a^\circ$	1. متمم الزاوية a° .
2. $s = 180^\circ - a^\circ$	2. مكمل الزاوية a° .
3. $S = 180^\circ$	3. مجموع قياس زوايا المثلث.
4. $S = 360^\circ$	4. مجموع قياس زوايا الشكل الرباعي.
5. $S = 360^\circ$	5. مجموع قياس الزوايا الخارجة للشكل المضلع (n -gon).
6. $S = 180^\circ(n - 2)$	6. مجموع قياس الزوايا الداخلة للشكل المضلع (n -gon).
7. $S = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$	7. قياس كل زاوية داخلة للشكل المضلع (n -gon) المتساوي الزوايا أو المنتظم.
8. $S = \frac{360^\circ}{n}$	8. قياس كل زاوية خارجة للشكل المضلع (n -gon) المتساوي الزوايا أو المنتظم.
9. $m\angle O = a^\circ$	9. قياس $\angle O$ المركزية المحصورة بقوس من a° .
10. $m\angle A = -\frac{1}{2}a^\circ$	10. قياس $\angle A$ المحوطة المحصورة بقوس من a° .
11. $m\angle A = -\frac{1}{2}a^\circ$	11. قياس $\angle A$ المتكونة من مماس ووتر ومحصورة بقوس من a° .
12. $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ + b^\circ)$	12. قياس $\angle A$ المتكونة من وترين وقوسين محصورين من a° و b° .
13. $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ + b^\circ)$	13. قياس $\angle A$ المتكونة من مماسين متقاطعين، قاطعين متقاطعين، أو مماس وقاطع متقاطعين وقوسين محصورين من a° و b° .

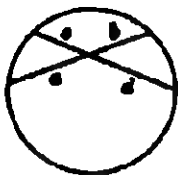
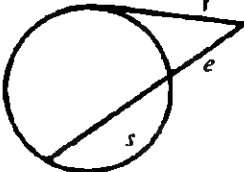
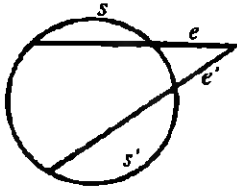
صيغ الزاوية Angle Formulas

14. $m\angle A = 90^\circ$	14. قياس $\angle A$ المحوطة في نصف دائرة.
15. $m\angle A = 180^\circ - m\angle B$	15. قياس الزوايا ($\angle s$) و B لشكل رباعي محوط.

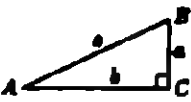
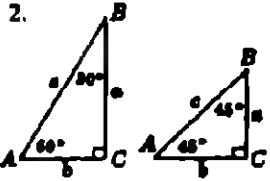


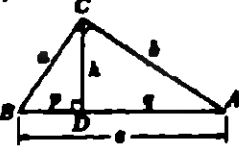
صيغ المساحات Area Formulas

1. $K = bh$	1. مساحة المستطيل
2. $K = s^2$, $K = \frac{1}{2}d^2$	2. مساحة المربع
3. $K = bh$, $K = ab \sin C$	3. مساحة متوازي الأضلاع
4. $K = \frac{1}{2}bh$, $K = \frac{1}{2}ab \sin C$	4. مساحة المثلث
5. $K = \frac{1}{2}h(b + b')$, $K = hm$	5. مساحة شبه المنحرف
6. $K = \frac{1}{2}s^2\sqrt{3}$, $K = \frac{1}{2}h^2\sqrt{3}$	6. مساحة المثلث متساوي الأضلاع
7. $K = \frac{1}{2}dd'$	7. مساحة المعين
8. $K = \frac{1}{2}pr$	8. مساحة المضلع المنتظم
9. $K = \pi r^2$, $K = \frac{1}{2}\pi d^2$	9. مساحة الدائرة
10. $K = \frac{\pi}{360}(\pi r^2)$	10. مساحة القطاع الدائري
11. $K = \text{area of sector} - \text{area of triangle}$ مساحة القطاع الدائري مساحة المثلث	11. مساحة القطع الثانوي

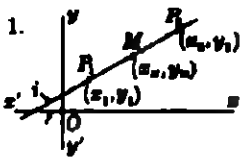


صيغ تقاطع الدائرة Circle Intersection Formulas

1.  الأوتار المتقاطعة $ab = cd$	2.  مماس وقاطع متقاطعان $\frac{s}{t} = \frac{t}{e}$, $r^2 = se$	3.  القاطعات المتقاطعة $se = s'e'$
--	---	---

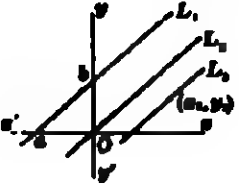

صيغ المثلث القائم Right-Triangle Formulas

1. 	نظرية فيثاغورس	1. $c^2 = a^2 + b^2$
2. 	الساق المقابلة للزاوية 30°. الساق المقابلة للزاوية 45°. الساق المقابلة للزاوية 60°.	2. $b = \frac{1}{2}c$ $b = \frac{1}{2}c\sqrt{2}, b = a$ $a = \frac{1}{2}c\sqrt{3}, a = b\sqrt{3}$
3. 	ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع ضلع المثلث المتساوي الأضلاع	3. $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$ $s = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$
4. 	ضلع المربع. قطر المربع.	4. $s = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$ $d = s\sqrt{2}$
5. 	الارتفاع إلى الوتر. ساق المثلث القائم.	5. $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}, h^2 = pq, h = \sqrt{pq}$ $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}, a^2 = pc, a = \sqrt{pc}$ $\frac{c}{b} = \frac{b}{q}, b^2 = qc, b = \sqrt{qc}$

صيغ الهندسة الإحداثية Coordinate-Geometry Formulas

1. 	نقطة المنتصف M المسافة P_1P_2 ميل P_1P_2	1. $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, m = \frac{\Delta y}{\Delta x}, m = \tan i$
2. 	ميل المتوازيين L_2 و L_1 ميل المتعامدين L' و L_1	2. نفس الميل m $mm' = -1$ $m' = -\frac{1}{m}, m = -\frac{1}{m'}$
3. 	معادلة L_1 ، موازي لمحور x معادلة L_2 ، موازي لمحور y	3. $y = k'$ $x = k$

صيغ الهندسة الإحداثية Coordinate-Geometry Formulas

<p>4.</p> 	<p>معادلة L_1 بميل m ومحور y يحصر b.</p> <p>معادلة L_2 بميل m ويمر خلال نقطة الأصل.</p> <p>معادلة L_1 ومحور x يحصر a ومحور y يحصر b.</p> <p>معادلة L_3 بميل m وتمر خلال (x_1, y_1).</p>	<p>4. $y = mx + b$</p> <p>$y = mx$</p> <p>$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$</p> <p>$y - y_1 = m(x - x_1)$</p>
<p>5.</p> 	<p>معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r.</p>	<p>5. $x^2 + y^2 = r^2$</p>

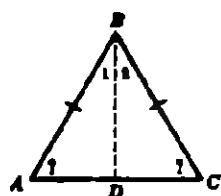
ملحق (B)

براهين لنظريات هامة

Proofs of Important Theorems

النظريات والبراهين المعطاة بأسفل تعتبر الأكثر أهمية فى التسلسل المنطقى للهندسة.

1. إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين، الزوايا المقابلة لهذين الضلعين متطابقة. (زوايا القاعدة للمثلث المتساوى الساقين متطابقة).



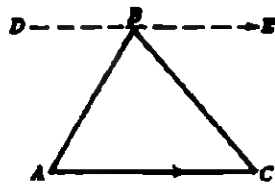
معطى: $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

إثبات أن: $\angle A \cong \angle C$

الخطوة: عند رسم منصف زاوية الرأس، الزوايا المطلوب إثبات تطابقها تصبح زوايا متناظرة لمثلثات متطابقة.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم \overline{BD} منصف $\angle B$	1. من الممكن تنصيف الزاوية.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. التنصيف هو التقسيم إلى جزئين متطابقين.
3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	3. معطى.
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. خاصية الانعكاس.
5. $\triangle ADB \cong \triangle BDC$	5. s.a.s \cong s.a.s
6. $\angle A \cong \angle C$	6. الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة تكون متطابقة.



2. مجموع قياس زوايا المثلث تساوي 180° .

معطى: $\triangle ABC$

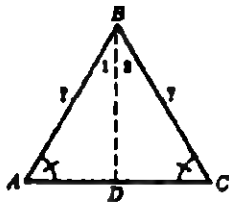
إثبات أن: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

الخطوة: عند رسم خط مستقيم خلال رأس من رؤوس المثلث ويكون موازٍ للضلع المقابل، تتكون زاوية مستقيم يمكن إثبات أن أجزائها مطابقة لزوايا المثلث.

البرهان:

الأسباب	التعابير
1. من خلال نقطة خارجية، يمكن رسم خط موازٍ لخط آخر معطى.	1. خلال B، رسم $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$
2. الزاوية المستقيمة هي زاوية قياسها 180° .	2. $m\angle DBE = 180^\circ$
3. الكل يساوي مجموع أجزائه.	3. $m\angle DBA + m\angle ABC + m\angle CBE = 180^\circ$
4. الزوايا المتبادلة الداخلية للخطوط المتوازية متطابقة.	4. $\angle A \cong \angle DBA, \angle C \cong \angle CBE$
5. مبدأ التعويض (التبديل).	5. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

3. إذا كانت زاويتان لمثلث متطابقتين، الضلعان المقابلان لهاتين الزاويتين تكونان متطابقتين.



معطى: $\triangle ABC, \angle A \cong \angle C$

إثبات أن: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

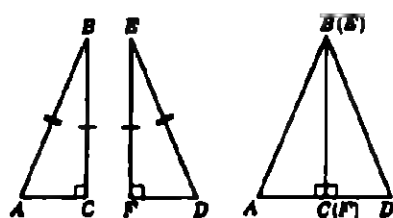
الخطوة: عند رسم منصف $\angle B$ ، الأضلاع المطلوب إثبات تطابقها تصبح أضلاع متناظرة لمثلثات متطابقة.

البرهان:

الأسباب	التعابير
1. من الممكن تنصيف الزاوية.	1. ارسم \overline{BD} منصف $\angle B$

التعابير	الأسباب
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. التنصيف هو التقسيم إلى جزئين متطابقين.
3. $\angle A \cong \angle C$	3. معطى.
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. خاصية الانعكاس.
5. $\triangle BDA \cong \triangle BDC$	5. s.a.a \cong s.a.a
6. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	6. الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة تكون متطابقة.

4. يكون المثلثان القائمان متطابقين إذا كان الوتر والساق لأحدهما مطابقين لأجزاءهم المناظرة فى المثلث الآخر.



معطى: مثلث قائم ABC بزاوية قائمة عند C .

مثلث قائم DEF بزاوية قائمة عند F .

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$$

إثبات أن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

الخطوة: حرك المثلثان معاً بحيث \overline{BC} يتطابق على \overline{EF} يتكون مثلث متساوى الساقين. المثلثان المعطيان يمكن إثبات أنهما متطابقان باستخدام النظرية 1.

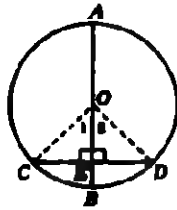
$$\text{و } s.a.a \cong s.a.a$$

البرهان:

التعابير	الأسباب
1. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	1. معطى.
2. حرك المثلثين ABC و DEF معاً بحيث \overline{BC} يتطابق على \overline{EF} ، النقطتان A و D تكونان على جوانب متقابلة من \overline{BC} .	2. الشكل الهندسى يمكن تحريكه بدون تغيير حجمه أو شكله. الخطوط المتساوية يمكن جعلها تتطابق.
3. $\angle C$ و $\angle F$ زاويتان قائمتان.	3. معطى.
4. $\angle ACD$ زاوية مستقيمة.	4. الكل يساوى مجموع أجزائه.
5. \overline{AD} قطعة مستقيمة.	5. أضلاع الزاوية المستقيمة تقع على خط مستقيم.
6. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	6. معطى.

التعبيرات	الأسباب
7. $\angle A \cong \angle D$	7. إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان متطابقتين.
8. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	8. s.a.a \cong s.a.a

5. القطر العمودى على وتر ينصف هذا الوتر وأقواسه.



معطى: الدائرة O، القطر $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

إثبات أن: $\widehat{CE} \cong \widehat{ED}$ ، $\widehat{BC} \cong \widehat{BD}$ ، $\widehat{AC} \cong \widehat{AD}$

الخطوة: تتكون مثلثات متطابقة عند رسم أنصاف أقطار

إلى C و D لتثبت أن $\widehat{CE} \cong \widehat{ED}$. الزوايا المركزية المتساوية تستخدم لإثبات

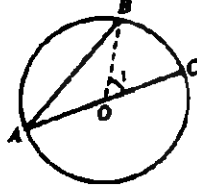
أن $\widehat{BC} \cong \widehat{BD}$ ، ثم يستخدم مبدأ لإثبات أن $\widehat{AC} \cong \widehat{AD}$.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم \overline{OC} و \overline{OD}	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $\overline{OC} \cong \overline{OD}$	2. أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.
3. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$	3. معطى.
4. $\angle OEC$ و $\angle OED$ مثلثان قائمان.	4. الأعمدة تُكوّن زوايا قائمة.
5. $\overline{OE} \cong \overline{OE}$	5. خاصية الانعكاس.
6. $\triangle OEC \cong \triangle OED$	6. ساق. وتر \cong ساق. وتر (hy.leg \cong hy.leg)
7. $\widehat{CE} \cong \widehat{ED}$ ، $\angle 1 \cong \angle 2$	7. الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة تكون متطابقة.
8. $\widehat{CB} = \widehat{BD}$	8. فى الدائرة، الزوايا المركزية المتطابقة لها أقواس متطابقة.
9. $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$	9. القطر ينصف الدائرة.
10. $\widehat{AC} = \widehat{AD}$	10. فى الدائرة، الأقواس المتطابقة هى أقواس متساوية؛ مبدأ الطرح.

6. الزاوية المحوطة في دائرة تقاس بنصف قوسها المحصور.

الحالة I: مركز الدائرة على أحد أضلاع الزاوية.



معطى: $\angle A$ محوطة في الدائرة O . O على الضلع AC .

إثبات أن: $\angle A \doteq \frac{1}{2} \widehat{BC}$

الخطوة: عند رسم نصف القطر OB ، يتكون متساوي الأضلاع

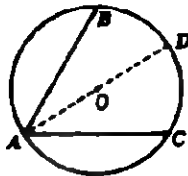
$\triangle AOB$. $\angle A$ تثبت أنها تساوى في قياسها نصف الزاوية المركزية $\angle 1$ ، والتي

تقاس بالقوس \widehat{BC} .

البرهان:

التعابير	الأسباب
1. ارسم \overline{OB} .	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	2. أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.
3. $\angle A \cong \angle B$	3. إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان متطابقتين.
4. $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$	4. في المثلث، قياس الزاوية الخارجة تساوى مجموع قياس الزاويتان الداخليتان تكونان متطابقتين المتجاورتان.
5. $m\angle A + m\angle A = 2m\angle A = m\angle 1$	5. مبدأ التعويض (التبديل).
6. $m\angle A = \frac{1}{2} m\angle 1$	6. أنصاف المتساويات تكون متساوية.
7. $\angle 1 \doteq \widehat{BC}$	7. الزاوية المركزية تقاس بقوسها المحصور.
8. $\angle A \doteq \frac{1}{2} \widehat{BC}$	8. مبدأ التعويض (التبديل).

الحالة II: المركز يقع داخل الزاوية.



معطى: $\angle BAC$ محوطة بالدائرة O . O تقع داخل $\angle BAC$.

إثبات أن: $\angle BAC \doteq \frac{1}{2} \widehat{BC}$

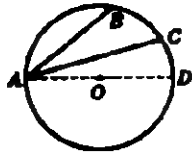
الخطوة: عند رسم القطر BC ، تُقسَم إلى زاويتين يمكن

قياسهما بتطبيق الحالة I.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم القطر \overline{AD} .	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $\angle BAD \doteq \frac{1}{2} \widehat{BD}$ ، $\angle DAC \doteq \frac{1}{2} \widehat{DC}$	2. الزاوية المحوطة تقاس بنصف قوسها المحصور إذا كان مركز الدائرة على أحد أضلاع الزاوية.
3. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2} \widehat{BD} + \frac{1}{2} \widehat{DC}$	3. إذا جمعت المتساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.
أو $\angle BAC \doteq \frac{1}{2} (\widehat{BD} + \widehat{DC})$	4. مبدأ التعويض (التبديل).
4. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2} \widehat{BC}$	

الحالة III: المركز يقع خارج الزاوية.



معطى: $\angle BAC$ محوطة بالدائرة O . O تقع خارج $\angle BAC$.

إثبات أن: $\angle BAC \doteq \frac{1}{2} \widehat{BC}$

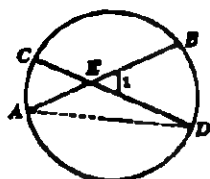
الخطوة: عند رسم القطر، تصبح فرق زاويتين

يمكن قياسهما بتطبيق الحالة I.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم القطر \overline{AD} .	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $\angle BAD \doteq \frac{1}{2} \widehat{BD}$ ، $\angle CAD \doteq \frac{1}{2} \widehat{CD}$	2. الزاوية المحوطة تقاس بنصف قوسها المحصور إذا كان مركز الدائرة على أحد الأضلاع.
3. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2} \widehat{BD} - \frac{1}{2} \widehat{CD}$	3. إذا طرحمت المتساويات من متساويات، تكون نواتج الطرح متساوية.
أو $\angle BAC \doteq \frac{1}{2} (\widehat{BD} - \widehat{CD})$	4. مبدأ التعويض (التبديل).
4. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2} \widehat{BC}$	

7. الزاوية المتكونة من وترين متقاطعين داخل دائرة تقاس بنصف مجموع الأقواس المحصورة.



معطى: $\angle 1$ تتكون من الوترين \overline{AB} و \overline{CD} المتقاطعين
فى النقطة E داخل الدائرة O .

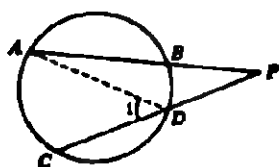
$$\angle 1 \doteq \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD})$$

الخطوة: عند رسم الوتر \overline{AD} ، $\angle 1$ تصبح زاوية خارجة للمثلث الذى زاويتاه الداخلتان غير المتجاورتين هما زاويتان محوطتان قياسهما $\frac{1}{2} \widehat{AC}$ و $\frac{1}{2} \widehat{BD}$.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم \overline{AD} .	1. الخط المستقيم من الممكن رسمه بين نقطتين.
2. $m\angle 1 = m\angle A + m\angle D$.	2. قياس الزاوية الخارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.
3. $\angle A \doteq \frac{1}{2} \widehat{BD}$ ، $\angle D \doteq \frac{1}{2} \widehat{AC}$.	3. الزاوية المحوطة فى دائرة تقاس بنصف قوسها المحصور.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2} \widehat{BD} + \frac{1}{2} \widehat{AC}$ أو $\angle 1 \doteq \frac{1}{2} (\widehat{BD} + \widehat{AC})$	4. مبدأ التعويض (التبديل).

8(a). الزاوية المتكونة من قاطعين متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين أقواسها المحصورة.



معطى: $\angle P$ متكونة من القاطعين \overline{PBA} و \overline{PDC}
المتقاطعين فى النقطة P ، نقطة خارج الدائرة O .

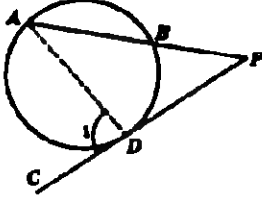
$$\angle P \doteq \frac{1}{2} (\widehat{AC} - \widehat{BD})$$

الخطوة: عند رسم \overline{AD} ، $\angle 1$ تصبح زاوية خارجة لـ $\triangle ADP$ ، بحيث $\angle P$ زاوية داخلية غير متجاورة.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم \overline{AD}	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $m\angle P + m\angle A = m\angle 1$	2. قياس الزاوية الخارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle A$	3. مبدأ الطرح.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2} \widehat{AC}$ ، $\angle A \doteq \frac{1}{2} \widehat{BD}$	4. الزاوية المحوطة فى دائرة تقاس بنصف قوسها المحصور.
5. $\angle P \doteq \frac{1}{2} \widehat{AC} - \frac{1}{2} \widehat{BD}$ أو $\angle P \doteq \frac{1}{2} (\widehat{AC} - \widehat{BD})$	5. مبدأ التعويض (التبديل).

(b)8. الزاوية المتكونة من قاطع ومماس متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين أقواسها المحصورة.



معطى: $\angle P$ متكونة من القاطع \overline{PBA} والمماس \overline{PDC}
المتقاطعين فى P ، وهى نقطة خارج الدائرة O .

إثبات أن: $\angle P \doteq \frac{1}{2} (\widehat{AD} - \widehat{BD})$

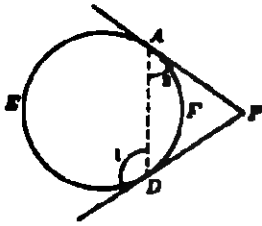
الخطوة: عند رسم الوتر \overline{AD} ، $\angle 1$ تصبح زاوية خارجة للمثلث $\triangle ADP$ ، بحيث $\angle A$ و $\angle P$ زاويتان داخلتان غير متجاورتين.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم \overline{AD}	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $m\angle P + m\angle A = m\angle 1$	2. قياس الزاوية الخارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle A$	3. مبدأ الطرح.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2} \widehat{AD}$	4. الزاوية المتكونة من مماس ووتر تقاس بنصف قوسها المحصور.

التعابير	الأسباب
5. $\angle A \doteq \frac{1}{2} \widehat{BD}$	5. الزاوية المحوطة تقاس بنصف قوسها المحصور.
6. $\angle P \doteq \frac{1}{2} \widehat{AD} - \frac{1}{2} \widehat{BD}$	6. مبدأ التعويض (التبديل).
أو $\angle P \doteq \frac{1}{2} (\widehat{AD} - \widehat{BD})$	

(c) 8. الزاوية المتكونة من مماسين متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين أقواسها المحصورة.



معطى: $\angle P$ متكونة من المماسين \overline{PA} و \overline{PD}

المتقاطعين في P ، نقطة خارج الدائرة O .

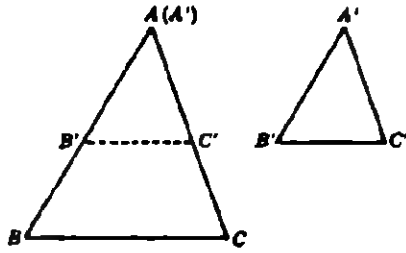
إثبات أن: $\angle P \doteq \frac{1}{2} (\widehat{AED} - \widehat{AFD})$

الخطوة: عند رسم الوتر \overline{AD} ، $\angle 1$ تصبح زاوية خارجة للمثلث $\triangle ADP$ ، بحيث $\angle P$ و $\angle 2$ زاويتان داخلتان غير متجاورتان.

البرهان:

التعابير	الأسباب
1. ارسم \overline{AD}	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $m\angle P + m\angle 2 = m\angle 1$	2. قياس الزاوية الخارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخليتين غير المتجاورتين.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle 2$	3. مبدأ الطرح.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2} \widehat{AED}$ ، $\angle 2 \doteq \frac{1}{2} \widehat{AFD}$	4. الزاوية المتكونة من مماس ووتر تقاس بنصف قوسها المحصور.
5. $\angle P \doteq \frac{1}{2} \widehat{AED} - \frac{1}{2} \widehat{AFD}$	5. مبدأ التعويض (التبديل).
أو $\angle P \doteq \frac{1}{2} (\widehat{AED} - \widehat{AFD})$	

9. إذا كانت ثلاث زوايا في مثلث مطابقة لثلاث زوايا في مثلث آخر، يكون المثلثان متماثلين.



معطى: ΔABC و $\Delta A'B'C'$ ، $\angle A \cong \angle A'$

$\angle C \cong \angle C'$ ، $\angle B \cong \angle B'$

إثبات أن: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

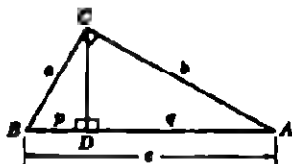
الخطوة: لإثبات أن المثلثين متماثلان، يجب توضيح

أن الأضلاع المتناظرة متناسبة. ويتم عمل ذلك عن طريق وضع المثلثين بحيث يتوافق زوج من الزوايا المتطابقة فوق بعضهما البعض، ثم يتم إعادة ذلك ليتوافق زوج آخر من الزوايا المتطابقة.

البرهان:

التعابير	الأسباب
1. $\angle A \cong \angle A'$	1. معطى.
2. ضع $\Delta A'B'C'$ على ΔABC بحيث $\angle A'$ تتطابق على $\angle A$.	2. الشكل الهندسى يمكن تحريكه بحيث لا يتغير حجمه أو شكله. الزوايا المتساوية يمكن جعلها تتطابق فوق بعضها البعض.
3. $\angle B \cong \angle B'$	3. معطى.
4. $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$	4. يكون الخطان متوازيين إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة.
5. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$	5. الخط الموازى لضلع فى المثلث يُقسّم الضلعين الآخرين بالتناسب.
6. بنفس الطريقة، ضع $\Delta A'B'C'$ على ΔABC بحيث $\angle B'$ تتطابق على $\angle B$ ، وضع أن $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$	6. الأسباب من 1 إلى 5.
7. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$	7. الأشياء (النسب) التى تساوى نفس الشيء تكون مساوية لبعضها البعض.
8. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$	8. المضلعان متماثلان إذا كانت زواياهم المتناظرة متطابقة وأضلاعهم المتناظرة متناسبة.

10. إذا رُسِم الارتفاع إلى وتر المثلث القائم، إذن (a) المثلثان المتكونان متماثلين مع المثلث المعطى ولبعضهما البعض. و (b) كل ساق للمثلث المعطى هي تناسب الوسط بين الوتر وإسقاط هذه الساق على الوتر.



معطى: $\triangle ABC$ بزاوية قائمة عند C .

الارتفاع \overline{CD} إلى الوتر \overline{AB} .

إثبات أن: $\triangle ADC \sim \triangle BDC \sim \triangle ABC$ (a)

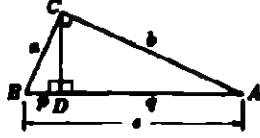
$c : a = a : p$, $c : b = b : q$ (b)

الخطوة: المثلثان متماثلين حيث أنهما بهما زاوية قائمة وزوج من الزوايا الحادة المتطابقة. التناسب يتبع من المثلثات المتماثلة.

البرهان:

الأسباب	التعابير
1. معطى.	1. $\angle C$ زاوية قائمة
2. معطى.	2. \overline{CD} هو الارتفاع إلى \overline{AB}
3. الارتفاع إلى ضلع في المثلث يكون عمودى على هذا الضلع.	3. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
4. أعمدة من زوايا قائمة.	4. $\angle CDA$ و $\angle CDB$ هما زاويتان قائمتان.
5. خاصية الانعكاس.	5. $\angle A \cong \angle A$, $\angle B \cong \angle B$
6. المثلثان القائمان يكونان متطابقين إذا كانت الزاوية الحادة لأحدهما تطابق الزاوية الحادة للآخر.	6. $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ $\triangle BDC \sim \triangle ABC$
7. المثلثات المتماثلة مع نفس المثلث تكون متماثلة مع بعضها البعض.	7. $\triangle ADC \sim \triangle BDC$
8. الأضلاع المتناظرة للمثلثات المتماثلة تكون متناسبة.	8. $c : a = a : p$, $c : b = b : q$

11. مربع طول الوتر في المثلث القائم يساوي مجموع مربعات أطوال الضلعين الآخرين.



معطى: المثلث القائم $\triangle ABC$ ، بزاوية قائمة عند C .
الساقان لهما طول a و b والوتر طوله c .

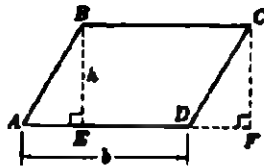
$$c^2 = a^2 + b^2$$

الخطة: رسم $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ وتطبيق النظرية 10.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	1. خلال نقطة خارجة، يمكن رسم خط عمودي على خط معطى.
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}$ ، $\frac{c}{b} = \frac{b}{q}$	2. إذا رُسم الارتفاع إلى الوتر في المثلث القائم، أى من الساقين تكون التناسب الوسط بين الوتر وإسقاط هذه الساق على الوتر.
3. $a^2 = cp$ ، $b^2 = cq$	3. في التناسب، حاصل ضرب الأوساط يساوى حاصل ضرب الأطراف.
4. $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q)$	4. إذا جمعت المتساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.
5. $c = p + q$	5. الكل يساوى مجموع أجزائه.
6. $a^2 + b^2 = c(c) = c^2$	6. مبدأ التعويض (التبديل).

12. مساحة متوازي الأضلاع تساوى حاصل ضرب طول أحد الأضلاع في طول الارتفاع إلى هذا الضلع.



معطى: $\square ABCD$ ، طول القاعدة: $b = \overline{AD}$ ،

طول الارتفاع: $h = \overline{BE}$.

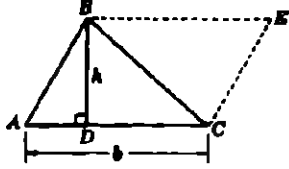
إثبات أن: مساحة $ABCD = bh$

الخطوة: عند إسقاط عمود على القاعدة ومد هذه القاعدة، يتكون مستطيل له نفس القاعدة والارتفاع مثل متوازي الأضلاع. عن طريق جمع المثلثات المتطابقة على مساحة مشتركة، يثبت أن المستطيل ومتوازي الأضلاع متساويان في المساحة.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overrightarrow{AD} \perp \overline{CF}$ (مد القاعدة)	1. خلال نقطة خارجة، يمكن رسم خط عمودي على خط معطى.
2. $\overline{CF} \parallel \overline{BE}$	2. القطع العمودية على نفس الخط تكون متوازية.
3. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	3. الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية.
4. $\angle BEA$ و $\angle CFD$ زوايا قائمة.	4. الأعمدة تُكوّن زوايا قائمة.
5. $BCFE$ مستطيل.	5. متوازي الأضلاع الذى يحوى زاوية قائمة هو مستطيل.
6. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CF} \cong \overline{BE}$	6. الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متساوية.
7. $\triangle ABE \cong \triangle CFD$	7. وتر. ساق \cong وتر ساق (hy.leg \cong hy.leg).
8. مساحة (الشكل الرباعي $BCDE$) = مساحة (الشكل الرباعي $BCDE$)	8. خاصية الانعكاس.
9. مساحة $\triangle ABE$ + مساحة (الشكل الرباعي $BCDE$) = مساحة (الشكل الرباعي $BCDE$) = مساحة (المستطيل $BCFE$)	9. إذا جمعت المتساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.
10. مساحة المستطيل $BCFE$ = bh	10. مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب أطوال قاعدته وارتفاعه.
11. مساحة $\square ABCD$ = bh	11. مبدأ التعويض (التبديل).

13. مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طول أحد الأضلاع فى طول الارتفاع إلى هذا الضلع.



معطى: $\triangle ABC$ ، طول القاعدة: $b = \overline{AC}$

طول الارتفاع: $h = \overline{BD}$

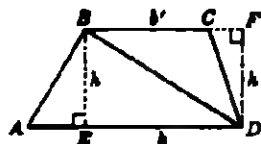
إثبات أن: مساحة $\triangle ABC = \frac{1}{2}bh$

الخطوة: برسم $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$ و $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$ يُكوّن متوازى أضلاع له نفس قاعدة وارتفاع المثلث. إذن مساحة المثلث هى نصف مساحة متوازى الأضلاع.

البرهان:

الأسباب	التعابير
1. خلال نقطة خارجة، يمكن رسم خط موازٍ لخط معطى.	1. ارسم $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$
2. الشكل الرباعى يكون متوازى أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.	2. $ABEC$ متوازى أضلاع قاعدته b وارتفاع h .
3. الخط القطرى يقسم متوازى الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.	3. مساحة $(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bh$ مساحة $(\square ABEC)$
4. مساحة متوازى الأضلاع تساوى حاصل ضرب أطوال قاعدته وارتفاعه.	4. مساحة $(\square ABEC) = bh$
5. مبدأ التعويض (التبديل).	5. مساحة $(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bh$

14. مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب طول الارتفاع فى مجموع أطوال قاعدتيه.



معطى: شبه المنحرف $ABCD$ ، الارتفاع \overline{BE} طوله h ،

القاعدة \overline{AD} طولها b ، القاعدة \overline{BC} طولها b'

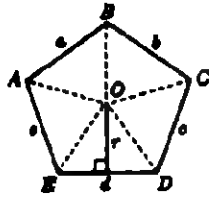
إثبات أن: مساحة $ABCD = \frac{1}{2}h(b + b')$

الخطوة: عند رسم الخط القطري، يُقسم شبه المنحرف إلى مثلثين لهما ارتفاع مشترك h وقاعدتان b و b' .

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم \overline{BD}	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. ارسم $\overrightarrow{DF} \perp \overline{BC}$ (مد القاعدة)	2. خلال نقطة خارجة، يمكن رسم خط عمودي على خط معطى.
3. $DF = BE = h$	3. الخطوط المتوازية تكون على بُعد متساوٍ.
4. مساحة $(\triangle ABD) = \frac{1}{2}bh$	4. مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب أطوال قاعدته وارتفاعه.
5. مساحة $(\triangle BCD) = \frac{1}{2}b'h$	5. إذا جمعت متساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.
5. مساحة $ABCD = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}b'h$	
$\frac{1}{2}h(b + b') =$	

15. مساحة المضلع المنتظم تساوى نصف حاصل ضرب محيطه في نصف قطر الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم.



معطى: المضلع المنتظم $ABCDE \dots$ له مركز O .

نصف قطر الدائرة المحوطة r ، محيط P .

إثبات أن: مساحة $ABCDE = \frac{1}{2}rp$

الخطوة: عن طريق ربط كل رأس بالمركز، نحصل على مثلثات متطابقة، مجموع مساحتها تساوى مساحة المضلع المنتظم.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \dots$	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.

التعابير	الأسباب
2. r هو ارتفاع كل مثلث مُكوّن.	2. أنصاف أقطار الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم متطابقة.
3. مساحة $\triangle AOB = \frac{1}{2} ar$ $\triangle BOC = \frac{1}{2} br$ $\triangle COD = \frac{1}{2} cr$	3. مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه.
4. مساحة المضلع المنتظم $ABCDE..$ $= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr +$ $= \frac{1}{2} r (a + b + c +)$	4. إذا جمعت المتساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.
5. $p = a + b + c ...$	5. الكل يساوى مجموع أجزائه.
6. مساحة $ABCDE... = \frac{1}{2} rp$	6. مبدأ التعويض (التبديل).

قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزي/عربي)

(A)		Congruency	تطابق
Acute angles	زوايا حادة	Congruent angle	زاوية متطابقة
Acute triangles	مثلثات حادة	Congruent figures	أشكال متطابقة
Adjacent angles	زوايا متجاورة	Congruent triangles	مثلثات متطابقة
Alternate interior angles	زوايا داخلية متبادلة	Constructions	انشاءات
Altitude of triangles	ارتفاع المثلث	Converse of a statement	مقلوب التعبير
Angle of bisector	منصف الزاوية	Corresponding angles	زوايا متناظرة
(B)		(D)	
		Deductive reasoning	تفكير استدلالى
Angles	زوايا	Defined terms	مصطلحات معرفة
Arc	قوس	Diameter	قطر
Areas	مساحات	Distances	مسافات
Assumptions	افتراضات	(E)	
Axioms	حقائق مقررة		
(C)		Equilateral triangles	مثلثات متساوية الأضلاع
		(F)	
Bisectors	منصفات	Formulas	صيغ
(C)		angle	زاوية
		area	مساحة
Central angle	زاوية مركزية	circle intersection	تقاطع دائرة
Chords	أوتار	coordinate	إحداثيات
Circles	دوائر	right triangle	مثلث قائم
Circumference	محيط	(H)	
Circumscribed circle	دائرة محيطة		
Circumscribed polygon	مضلع محيط	Hypothesis	فرضية
Complementary angles	زوايا متتامه	(I)	
Concentric circles	دوائر متحد المركز		
Conclusion (deductive)	استنتاج (استدلال)	If-then form	أسلوب إذا - إذن

Inscribed angle	زاوية محوطة	Principles	قواعد
Inscribed circle	دائرة محوطة	angle-measurement-sum	
Inscribed polygon	مضلع محوط	مجموع - قياس - زاوية	
Isosceles trapezoids	أشباه منحرف متساوية الساقين	angle-measurement	قياس - زاوية
Isosceles triangles	مثلثات متساوية الساقين	circle	دائرة
(L)		congruency	تطابق
Line segments	قطعة مستقيمة	congruent triangles	مثلثات متطابقة
Lines	خطوط	distances	مسافات
(M)		isosceles and equilateral triangles	
Major arc	قوس رئيسي	مثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع	
Major premise	مقدمة كبرى	mean proportional in rt. triangle	
Measuring angles	قياس الزوايا	المتناسب الوسط في المثلث القائم	
Median of a triangle	المستقيم المتوسط للمثلث	pairs of angles	أزواج الزوايا
Minor arc	قوس ثانوي	parallel lines	خطوط متوازية
Minor premise	مقدمة صغرى	parallelograms	متوازيات أضلاع
(O)		polygon angles	زوايا مضلع
Obtuse angle	زاوية منفرجة	polygons	مضلعات
Obtuse triangle	مثلث منفرج	proportion	متناسب
(P)		proportional segments	قطع متناسبة
Parallel lines	خطوط متوازية	regular polygons	مضلعات منتظمة
Parallelograms	متوازيات أضلاع	similar triangles	مثلثات متماثلة
Pentagons	أشكال خماسية	special parallelograms	
Perpendicular bisector	عمود منصف	متوازيات أضلاع خاصة	
Perpendiculars	أعمدة	special rt. triangles	
Planes	مستويات	مثلثات قائمة خاصة	
		tangents	مماسات
		Proof by deductive reasoning	
		البرهان بالتفكير الاستدلالي	

Proofs	براهين	Similar triangles	مثلثات متماثلة
Proportional segments	قطع متناسبة	Similarity	تماثل
Proportions	متناسبات	Special parallelograms	
Proving theorems	إثبات النظريات		متوازيات أضلاع خاصة
Point	نقطة	Special right triangles	
Polygons	مضلعات		مثلثات قائمة خاصة
Postulates	مبادئ أساسية	Squares	مربعات
Pythagorean theorem	نظرية فيثاغورس	Straight angle	زاوية مستقيمة
(R)		Subject-predicate form	
Radius	نصف قطر		أسلوب المسند إليه - المسند
Ratios	نسب	Supplementary angles	الزوايا المتكاملة
Rectangle	مستطيل	Syllogistic reasoning	تفكير قياسي
Reflex angle	زاوية انعكاس	(T)	
Regular polygons	مضلعات منتظمة	Tangent	مماس
Rhombus	معين	Theorems	نظريات
Right angle	زاوية قائمة	Trapezoids	أشباه منحرف
Right triangles	مثلثات قائمة	Triangles	مثلثات
(S)		(U)	
Scalene triangle		Undefined terms	مصطلحات غير معرفة
	مثلث غير متساوي الأضلاع	(V)	
Secant	قاطع	Vertex	رأس
Segments	قطعة	Vertical angles	زوايا متقابلة بالرأس
Semicircle	نصف دائرة		

When you don't have the time... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, *Schaum's Easy Outline* is perfect for you! This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need to know in a fraction of the time.

SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this *Easy Outline* packs exciting new learning tools that make mastering geometry fast, fun—and almost automatic.

SPEEDY

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing geometry to the essentials the professor expects you to know. This *Easy Outline* is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

HI-QUALITY

Easy Outlines give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.

BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this *Easy Outline* lets you study geometry anywhere.

SCHAUM'S GETS THE GRADE!

Let's talk bottom line. *Schaum's Easy Outlines* give you what you want—better grades, with less work, and more free time!

Get the essence of geometry the easy way. *Schaum's Easy Outline of Geometry* helps you master geometry with plenty of illustrations, memory joggers, and the newest, rapid-absorption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for academic authority, this is the study guide students turn to and trust. Students know that Schaum's is going to be there for them when they need it!

- Quick study tips
- Student-friendly style
- At-a-glance tables
- Perfect for test prep



The McGraw-Hill Companies

Visit us at: www.books.mcgraw-hill.com

Arabic version by:

International House for Cultural Investments S.A.E.

ISBN 977-282-160-5



6

222006

625047

نم احاطه الشرف بواحدة

مكتبة عمل

ask2pdf.blogspot.com